Карлен Худавердиев, Ахмед Велиев

Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью

Карлен Худавердиев, Ахмед Велиев

УДК 517.946

Главный редактор: Чл.-корр. НАН Азербайджана, д.ф.-м.н.,
профессор Б.А.ИСКЕНДЕРОВ

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор Б.Т.БИЛАЛОВ,
д.ф.-м.н., профессор Т.С.ГАДЖИЕВ

Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. – Баку: Çaşıoğlu, 2010 – 168 с.

Многие задачи теории упругости, физики, гидромеханики, теории пластичности, механики сплошной среды, релятивистской квантовой механики и математической физики сводятся к изучению различных смешанных задач для линейных и, особенно, нелинейных гиперболических и псевдогиперболических уравнений.

Данная монография посвящена изучению вопросов существования (как в малом, так и в целом) и единственности, а также некоторых качественных свойств, различных типов решений одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью, причём отдельно, более детально изучен случай, когда этот оператор является оператором типа функции, т.е. он порождён обычной функцией.

Книга предназначена для математиков, механиков и физиков. В ней найдут много полезного для себя студенты старших курсов математических факультетов, а также аспиранты и научные сотрудники, занимающиеся изучением краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений.

$Х\frac{1602040000-595}{082-10}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Книга посвящена изучению вопросов существования (как в малом, так и в целом) и единственности обобщённого, почти всюду и классического решений следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \alpha\, u_{txx}(t,x) = \mathscr{F}(u(t,x)) \quad (0 \le t \le T, 0 \le x \le \ell), & (0.1) \\ u(0,x) = \varphi(x) \quad (0 \le x \le \ell), \quad u_t(0,x) = \psi(x)\,(0 \le x \le \ell), & (0.2) \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0 \quad (0 \le t \le T), & (0.3) \end{cases}$$

где $0 < T < +\infty$, $0 < \ell < +\infty$; $\alpha > 0$ - фиксированное число; φ, ψ – заданные функции, $\mathscr{F}$ - заданный, вообще говоря, нелинейный оператор, а $u(t,x)$ - искомая функция; кроме того, отдельно, более подробно, исследован случай задачи (0.1)-(0.3), когда $\mathscr{F}$ является оператором типа функции, а именно, когда уравнение (0.1) имеет вид:

$$u_{tt}(t,x) - \alpha\, u_{txx}(t,x) = F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))$$
$$(0 \le t \le T, 0 \le x \le \ell), \quad (0.4)$$

где $F(t,x,u_1,...,u_5)$ – заданная функция; далее, еще подробнее исследован случай, когда уравнение (0.4) имеет следующий специальный вид:

$$u_{tt}(t,x) - \alpha\, u_{txx}(t,x) = \sigma'(u_x(t,x)) \cdot u_{xx}(t,x) + f(x,u(t,x)) +$$
$$+ F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x)) \quad (0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le \ell), \quad (0.5)$$

причём условия, налагаемые на функции σ и f, таковы, что объединение функций $\sigma'(u_x(t,x)) \cdot u_{xx}(t,x)$ и $f(x,u(t,x))$ с функцией $F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))$, вообще говоря, нецелесообразно.

Следует отметить, что многие задачи теории упругости, в частности, задача о продольном колебании упруго-вязкого неоднородного стержня, задача о продольном ударе абсолютно твёрдым телом по упруго-вязкому неоднородному стержню конечной длины и переменного сечения, распространение волн в вязко-упругом теле, распространение импульсов вдоль нервных аксонов (нейронов) и многие другие задачи сводятся к решению смешанной задачи типа (0.1)-(0.3) для различных частных случаев уравнения (0.1) .

Основным аппаратом исследования в данной книге являются методы и идеи нелинейного функционального анализа, реализованные в докторской диссертации [1] при изучении многомерной смешанной задачи для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка.

Теперь, прежде, чем перейти к краткому описанию содержания данной книги, дадим краткий обзор некоторых работ, непосредственно связанных с задачей (0.1)-(0.3) и её многомерным аналогом, а также некоторых работ, в которых для различных частных случаев уравнения (0.1) и его многомерного аналога изучаются задачи, в определённом смысле близкие к задаче (0.2), (0.3).

В 1962-1963 годах в работах [2]-[4] рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)-u_{txx}(t,x)=f(u(t,x))\cdot u_t(t,x)+g(u(t,x)) \quad (t\ge 0,\ x\ge 0), \\ u(0,x)=\varphi(x) \quad (x\ge 0),\ u_t(0,x)=\psi(x)\ (x\ge 0), \\ u(t,0)=\mu(t) \quad (t\ge 0); \end{cases}$$

доказана теорема существования и единственности классического решения и изучено поведение классического решения задачи при $t\to+\infty$ для случаев $g(u)=u$ и $g(u)=0$.

В 1967 году в работе [5] Расуловой Г.А. (Худавердиевой Г.А.) рассмотрена задача (0.4), (0.2), (0.3) в случае, когда

$$F=u_{xx}+\lambda f(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}),\quad \ell=\pi,$$

где λ - числовой параметр; введены понятия обобщённого, почти всюду и классического решений; с помощью метода последовательных приближений и принципов Красносельского М.А., Шаудера и Лере-Шаудера доказаны локальные (т.е. справедливые при достаточно малых значениях $|\lambda|$) и нелокальные теоремы существования и единственности обобщённого, почти всюду и классического решений; изучена непрерывная зависимость (в определённом смысле) всех трёх типов решений от φ, ψ и f; кроме того, изучена ограниченность (в определённой норме) и поведение при $t \to +\infty$ решений, когда они существуют для любого T>0. Следует особо отметить, что большинство теорем, установленных в работе [5], локальные, а в нелокальных теоремах либо функция $f(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})$ удовлетворяет в $[0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^5$ глобальному условию Липшица по переменным u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}, либо $f=f(t,x,u,u_t,u_x)$ и функция $f(t,x,u,u_t,u_x)$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^3$ имеет по переменным u,u_t,u_x при $|\ u\ |+|\ u_t\ |+|\ u_x\ |\to+\infty$ лишь линейный (первый) порядок роста.

В 1968 году в работе [6] Гринберга Дж.М., Мак Кейми Р.К. и Мизеля В.Дж. рассмотрен частный случай задачи (0.5), (0.2),(0.3), когда $f\equiv 0, F\equiv 0, \ell=1$, $\sigma(y)\in C^{(3)}(-\infty,\infty)$, $\sigma(0)=0$, $\sigma'(y)>0 \qquad \forall y\in(-\infty,\infty)$, $\varphi(x)\in C^{(4)}([0,1])$, $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi''(0)=$ $=\varphi''(1)=0$, $\psi(x)\in C^{(2)}([0,1]), \psi(0)=\psi(1)=\psi''(0)=\psi''(1)=0$; доказано существование единственного классического решения $u(t,x)$, обладающего свойствами:

$$\sum_{i+j\le 2}\left\|\frac{\partial^{i+j}u(t,x)}{\partial t^i\partial x^j}\right\|_{C([0,1])}\equiv \|u\|(t)\le M(\varphi,\psi) \qquad \forall t\ge 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\|u\|(t)=0,$$

где $\mathcal{M}(\varphi,\psi)$ - постоянная, причём

$$\mathcal{M}(\varphi,\psi)\to 0 \text{ при } \|\varphi(x)\|_{C^{(2)}([0,1])}+\|\psi(x)\|_{C^{(2)}([0,1])}\to 0. \qquad (0.6)$$

В 1969 году в работе [7] Гринберга Дж.М. рассмотрена задача

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \alpha\, u_{txx}(t,x) = E(u_x(t,x)) \cdot u_{xx}(t,x)(0 \le t < +\infty,\ 0 \le x \le 1), \\ u(0,x) = x\ (0 \le x \le 1), u_t(0,x) = \psi(x)(0 \le x \le 1), \\ u(t,0) = 0\ (t \ge 0), u(t,1) = 1\ (t \ge 0), \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ - постоянная, $E(y) \in C^{(2)}(-\infty,\infty), E(y) > 0\ \ \forall y \in (-\infty,\infty)$, $\psi(x) \in C^{(2)}([0,1])$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$; доказано существование и единственность обобщённого (в определённом смысле) решения $u(t,x)$ этой задачи, обладающего свойствами:

$$\|u(t,x) - x\|_{C([0,1])} + \|u_x(t,x) - 1\|_{C([0,1])} + \|u_t(t,x)\|_{C([0,1])} +$$

$$+ \|u_{xx}(t,x)\|_{C([0,1])} + \|u_{tx}(t,x)\|_{L_2(0,1)} \equiv U(t) \le \mathcal{M}(\psi) \quad \forall t \ge 0,$$

$$\lim_{t \to +\infty} U(t) = 0,$$

где $\mathcal{M}(\psi) \ge 0$ - постоянная, причём $\mathcal{M}(\psi) \to 0$ при $\|\psi(x)\|_{C^{(1)}([0,1])} \to 0$.

В 1970 году в работе [8] Гринберга Дж. М. и Мак Кейми Р.К. рассмотрен частный случай задачи (0.5), (0.2), (0.3), когда $f \equiv 0, \quad F \equiv 0, \ell = 1, \ \sigma(y) \in C^{(3)}(-\infty,\infty), \sigma'(y) > 0 \ \ \forall y \in (-\infty,\infty)$, $\varphi(x), \psi(x) \in C^{(2)}([0,1])$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = \sigma'(\varphi'(0))\varphi''(0) + \alpha\psi''(0) = \sigma'(\varphi'(1))\varphi''(1) + \alpha\psi''(1) = 0$; доказано существование и единственность классического решения $u(t,x)$, обладающего свойствами:

$$\|u(t,x)\|_{C([0,1])} + \|u_t(t,x)\|_{C([0,1])} + \|u_x(t,x)\|_{C([0,1])} + \|u_{tx}(t,x)\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+ \|u_{xx}(t,x)\|_{C([0,1])} \le \mathcal{M}(\varphi,\psi) \cdot e^{-kt} \quad \forall t \ge 0,$$

$$\int_0^t e^{-2k\tau} \cdot \left\{ \|u_{\tau\tau}(\tau,x)\|^2_{L_2(0,1)} + \|u_{\tau xx}(\tau,x)\|^2_{L_2(0,1)} \right\} d\tau \le \mathcal{M}(\varphi,\psi),$$

где $k > 0$, $\mathcal{M}(\varphi,\psi) \ge 0$ - постоянные и имеет место соотношение (0.6).

В 1970 году в работе [9] Мак Кейми Р.К. рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sigma\left(u_x(t,x)\right) + \lambda\left(u_x(t,x)\right)\ u_{tt}(t,x)\right) \quad (t \ge 0,\ 0 \le x \le 1), \\ u(0,x) = \varphi(x) \quad (0 \le x \le 1), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (0 \le x \le 1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0\ (t \ge 0), \end{cases}$$

где

$\varphi(x) \in C^{(4)}([0,1]), \psi(x) \in C^{(2)}([0,1]), \sigma(y) \in C^{(2)}(-\infty,\infty), \sigma(0) = 0,$

$\sigma'(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in (-\infty,\infty), \lambda(y) \in C^{(1)}(-\infty,\infty), 0 < \lambda_0 \le \lambda(\xi) \le \lambda_1 \forall \xi \in (-\infty,\infty).$

Такая задача возникает в нелинейной теории упругости. В работе установлено существование, единственность и стабилизация решений рассматриваемой задачи.

В 1971 году в работе [10] Крицкой С.С. рассмотрена задача о продольном ударе абсолютно твёрдым телом по упруго-вязкому неоднородному стержню конечной длины со свободными концами и переменного сечения, сводящаяся к краевой задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(E_0 f(x)\omega(x)\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu_0 f(x)\omega(x)\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x}\right) = \\ = \rho\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} (t \ge 0, \quad 0 \le x \le \ell), \\ u(0,x) = 0 \quad (0 \le x \le \ell), \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \le x < \ell, \\ -\upsilon_0 & \text{при } x = \ell, \end{cases} \\ E_0 \dfrac{\partial u(t,0)}{\partial t} + \mu_0 \dfrac{\partial^2 u(t,0)}{\partial t \partial x} = 0 \qquad (t > 0), \\ \omega(\ell)\left\{E_0 f(\ell)\dfrac{\partial u(t,\ell)}{\partial x} + \mu_0 f(\ell)\dfrac{\partial^2 u(t,\ell)}{\partial t \partial x}\right\} = -m\dfrac{\partial^2 u(t,\ell)}{\partial t^2} \quad (t > 0), \end{cases}$$

где $E_0, \mu_0, \rho, \upsilon_0, m$ - положительные постоянные, $f(x), \omega(x)$ – положительные на $[0,\ell]$ функции, имеющие производную четвёртого порядка с полной ограниченной вариацией для

$0 \le x \le \ell$. Методом Фурье получено решение этой задачи в виде ряда, члены которого имеют порядок $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Проведено математическое исследование полученного решения, в связи с чем изучено поведение частных производных первого и второго порядка, а также $\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t \partial x^2}$ для $0 \le x \le \ell$, t>0 и при $t \to +\infty$.

В 1971 году в работе [11] Дэвиса П.Л. рассмотрен случай задачи (0.5), (0.2), (0.3), когда $f \equiv 0, F = F(t,x)$, $\ell = \pi$ и для решений установлена априорная оценка, позволяющая получить условия существования, единственности и асимптотической устойчивости.

В 1972 году в диссертации [12] Кулиевой Б.А. исследованы вопросы существования и единственности обобщённого и классического решений следующих двух одномерных предельных краевых задач:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{txx}(t,x) = F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x)) \quad (0 \le t \le T, x \ge 0), \\ u(0,x) = \varphi(x) \quad (x \ge 0), u_t(0,x) = \psi(x) \quad (x \ge 0), \\ u(t,0) = \mu(t) \quad (0 \le t \ge T); \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{txx}(t,x) = F_1(t,x,u(t,x)) \quad (0 \le t \le T, x \le 0), \\ V_{tt}(t,x) - V_{xx}(t,x) = F_2(t,x,V(t,x)) \quad (0 \le t \le T, x \ge 0), \\ u(0,x) = \varphi_1(x) \, (x \le 0), \quad u_t(0,x) = \psi_1(x)(x \le 0), \\ V(0,x) = \varphi_2(x)(x \ge 0), \quad V_t(0,x) = \psi_2(x) \quad (x \ge 0), \\ u(t,-0) = V(t,+0) \quad (0 \le t \le T), \\ \alpha(t) u_x(t,-0) = V_x(t,+0) \quad (0 \le t \le T), \end{cases}$$

где $0 < T < +\infty$, $F, F_1, F_2, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \psi, \psi_1, \psi_2, \mu, \alpha -$ заданные функции, а $u(t,x), V(t,x) -$ искомые функции.

В 1974 году в работе [13] Рубинова Л.Я. получены оценки влияния нормальных составляющих напряжений в вязкой сжимаемой жидкости на динамику ламинарного потока в трубе. Составлены уравнения для давлений и расходов, распространение которых описывается дифференциальными уравнениями в частных производных третьего порядка вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + b \cdot \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

где $\alpha \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$ – определённые постоянные. Рассматриваемая задача решена для давлений при нулевых начальных и одном из граничных условий. На другой границе действует возмущение $u_b = u_0 \sin \omega t$. Вынужденные колебания определены методом комплексных амплитуд, свободные - способом Фурье. Найдены коэффициенты влияния нормальных напряжений на динамические характеристики потока, определён коэффициент затухания, величина которого зависит от вязкости и собственных чисел задачи. Показано, что в коротких трубах (длиной $|\ell| < \pi$) влияния нормальных напряжений на затухание свободных колебаний велико уже для первых гармоник.

В 1974 году в работе [14] Соунти К.О.А. получены необходимые и достаточные условия существования периодического по t обобщённого решения задачи

$$\rho u_{tt}(t,x) - \mu u_{xx}(t,x) - \int_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(t-\tau) u_{xx}(\tau,x) d\tau - \lambda u_{txx}(t,x) = f(t,x)$$

$$(-\infty < t < +\infty,\quad 0 \leq x \leq 1),$$

где ρ, μ, λ – действительные числа, $f(t,x)$ - периодическая по t, квадратично суммируемая по прямоугольнику $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ комплекснозначная функция и $\mathcal{K}$ – действительнозначная функция из пространства $L_2(0,+\infty)$. Решение ищется в виде $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) e^{2\pi int}$; для функций $\varphi_n(x)$ $(n = 0, \pm 1, \cdots)$ получается задача на собственные значения для самосопряжённого вполне непрерывного оператора.

В 1974 году в работе [15] Нишихары К. рассмотрен частный случай задачи (0.5),(0.2),(0.3), когда $f \equiv 0, F \equiv 0$, $\sigma(y) \in$ $\in C^{(3)}(-\infty,\infty)$, $\sigma(0) = 0$ и $\sigma^1(y) > 0$ $\forall y \in (-\infty, \infty)$; доказано, что классическое решение этой задачи убывает экспоненциально при $t \to +\infty$ вместе со всеми своими производными до второго порядка включительно и, тем самым, усилен результат работы [6].

В 1975 году в работе [16] Дэвиса П.Л. рассмотрен частный случай задачи (0.5), (0.2), (0.3), когда $f \equiv 0$, $F \equiv 0, \ell = \pi$, $\sigma'(u_x) = a_1 + a_2 \cdot u_x^2, a_1 > 0, a_2 > 0$ – постоянные, $\varphi(x), \psi(x)$ - достаточно гладкие на $[0,\pi]$ функции, причём $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \psi(0) = = \psi(\pi) = 0$; доказано, что существует решение $u_\alpha(t,x)$ этой задачи (при $0 \le t \le T^* \le T$; T^* не зависит от α), непрерывно зависящее от начальных данных, при этом $T^* \to +\infty$ если $a_1 \to \infty$ или $\varphi, \psi \to 0$ в подходящем смысле; кроме того, при $\alpha \to 0$:

$$\frac{\partial^{i+j} u_\alpha(t,x)}{\partial t^i \partial x^j} \to \frac{\partial^{i+j} u_0(t,x)}{\partial t^i \partial x^j} \quad \text{в} \quad C\left([0,T^*]\times[0,\pi]\right) \quad (i+j \le 2; i \le 1).$$

В 1975 году в работе [17] Накао Митсухиро и Токимори Нанбу рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u_t(t,x) - \sum\limits_{i=1}^{N} \left(\left| u_{x_i}(t,x) \right|^{p-2} \right)_{x_i} + \beta(x, u(t,x)) = f(t,x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t \ge 0, x \in \Omega), \\ u(0,x) = \varphi(x) \quad (x \in \Omega), \qquad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (x \in \Omega), \\ u(t,x)\big|_\Gamma = 0 \quad (\Gamma \equiv [0,\infty) \times \partial\Omega), \end{cases}$$

где Ω - ограниченная n-мерная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega, \Delta$ – n-мерный оператор Лапласа, $p \ge 2, \beta, f, \varphi, \psi$ - заданные функции; найдены достаточные условия существования глобальных (ограниченных) решений, когда $\beta(x,u) \ne 0$ и не монотонна по u.

В 1975 году в работе [18] Клемана Дж.К. рассмотрена задача:

$$
\begin{cases}
u_{tt}(t,x)-\Delta u_t(t,x)-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_i(u_{x_i}(t,x))\right)=f(t,x) \quad (0\le t\le T, x\in\Omega),\\
u(0,x)=\varphi(x) \quad (x\in\Omega), \quad u_t(0,x)=\psi(x) \quad (x\in\Omega),\\
u(t,x)\big|_{\Gamma}=0 \quad \left(\Gamma\equiv[0,T)\times\partial\Omega\right),
\end{cases}
$$

где $0<T<+\infty$, Ω – ограниченная n-мерная область с границей $\partial\Omega$, Δ – n-мерный оператор Лапласа,

$$\sigma_i(\xi)\in C^{(1)}(-\infty,\infty), \sigma_i(0)=0, \quad 0<\sigma_i'(\xi)\le k_0=const(i=\overline{1,n}),$$

$$\varphi(x)\in \overset{0}{D}(\Omega)\bigcap w_2^2(\Omega), \psi(x)\in \overset{0}{D}(\Omega), f(t,x)\in L_2((0,T)\times\Omega);$$

доказана теорема о существовании и единственности решения почти всюду.

В 1976 году в работе [19] Филимонова А.М. изучена задача нахождения периодических (по одной или обоим переменным) решений уравнения

$$u_{tt}-k\left|u_x\right|^n\cdot u_{xx}-\mu\left|u_{tx}\right|^n\cdot u_{txx}-\gamma u_t=0,$$

где k>0, n>-1, $\mu>0$ - постоянные; найдены достаточные условия образования стоячих волн.

В 1977 году в работе [20] Рауппа М.А. и Ресенде Н.С. рассмотрен случай задачи (0.5), (0.2), (0.3), когда

$$f\equiv 0, F=F(t,x), \ell=1, \sigma'(u_x)=a_1+a_2\cdot u_x^2$$

и для нахождения решения этой задачи применён метод Галёркина.

В 1979 году в работе [21] Кожанова А.И. рассмотрена задача:

$$
\begin{cases}
u_{tt}(t,x)-\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x}(a(t,x)u_x(t,x))=\dfrac{\partial}{\partial x}(b(t,x)\sigma(u_x(t,x)))+\\
+f(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x)) \quad (0\le t\le T, \quad 0\le x\le 1),\\
u(0,x)=u_t(0,x)=0 \quad (0\le x\le 1), \quad u(t,1)=0\,(0\le t\le T),
\end{cases}
$$

где $a(t,x)>0$, $b(t,x)>0$ при $0\le t\le T$, $0<x\le 1$; $a(t,0)=b(t,0)=0$ $(0\le t\le T)$; $\sigma(0)=0$, $0\le\sigma'(y)\le C_0<2$ $\forall y\in(-\infty,\infty)$; в $[0,T]\times[0,1]\times(-\infty,\infty)^3$

$$\left|f(t,x,u,u_t,u_x)\right|\le C\cdot\left\{1+|u|+|u_t|+a(t,x)\cdot|u_x|\right\};$$

и выполнен целый ряд условий, связывающих функции a,b и f. Введено понятие обобщённого решения и доказана теорема существования обобщённого решения рассматриваемой задачи.

В 1979 году в работе [22] Эриа Дж.К. и Ларднера Р.У. изучены приближённые решения задачи (0.2), (0.3) для уравнения

$$u_{tt}-u_{xx}=\varepsilon\cdot\left\{2\mu u_x\cdot u_{xx}+2\gamma u_x^2\cdot u_{xx}-k\cdot u_{txx}\right\},$$

отвечающего реологической модели Фойгта и описывающего плоские колебания среды, проявляющей малую нелинейную упругость и линейно вязкоупругое поведение, где $\mu>0,\gamma>0,k>0$ – определённые постоянные, а $\varepsilon>0$ – малый параметр.

В 1978-1979 годах в работах [23], [24] Эбихары Ю. при достаточно малых начальных и граничных данных доказано существование глобальных классических решений для уравнений вида

$$u_{tt}-\Delta u_t-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{2p}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=0;$$

$$u_{tt}-\Delta u_t+C_1\cdot(\Delta u)^p+C_2\cdot(\Delta u)^q=0\,.$$

В 1980 году в работе [25] Эндрьюса Г. рассмотрен частный случай задачи (0.5), (0.2), (0.3), когда $f\equiv 0$, $F\equiv 0$, $\ell=1$ и доказано существование единственного решения

$$u(t,x)\equiv u(t)\in C([0,T];\overset{0}{W}{}^{1}_{\infty}(0,1))$$

этой задачи.

В 1980 году в работе [26] Уэбба Дж.Ф. рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)-\alpha\,\Delta u_t(t,x)=\Delta u(t,x)+f(u(t,x)) & (t>0,\,x\in\Omega),\\ u(0,x)=\varphi(x)\;(x\in\Omega),\;\; u_t(0,x)=\psi(x)\;(x\in\Omega), & \\ u(t,x)\,\big|_{\Gamma}=0 & (\Gamma\equiv[0,T]\times\partial\Omega), \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ – постоянная, Ω - ограниченная область в $R^n (n \le 3)$, Δ - n-мерный оператор Лапласа, f, φ, ψ - заданные функции; в работе найдены достаточные условия существования и единственности её сильного глобального решения и исследовано его поведение при $t \to +\infty$.

В 1980 году в работе [27] Лонгмана Дж.М. исследовано распространение волн в вязкоупругом теле из плоского и точечного источников ступенчатой функцией Хевисайда, причём изучаемая задача связана с решением нормализованного уравнения Стокса

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

В 1980 году в работе [28] Пяткова С.Г. рассмотрены следующие две задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + \alpha(t,x) u_{xx}(t,x) + \beta(t,x) u_{tx}(t,x) + k(t,x) u_{txx}(t,x) + \\ + a(t,x) u_t(t,x) + b(t,x) u_x(t,x) + c(t,x) u(t,x) = f(t,x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (0 \le t \le T, 0 \le x \le 1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad (0 \le t \le T), \\ u(0,x) = u(T,x) = 0 \quad (u_t(0,x) = u_t(T,x) = 0), \quad 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

когда $k(0,x) \ge 0$, $k(T,x) \le 0$ (соответственно, $k(0,x) \le 0$, $k(T,x) \ge 0$); при предположениях

$$\alpha(t,x), \beta(t,x), k(t,x), a(t,x), b(t,x), c(t,x) \in C^{(3)}([0,T] \times [0,1]),$$

$$f(t,x) \in L_2((0,T) \times (0,1)), \frac{1}{4}(\beta(t,x) - k_x(t,x))^2 < \alpha(t,x) - \frac{1}{2}|k_t(t,x)|,$$

$$\frac{1}{4}\beta^2(t,x) < \alpha(t,x) - \frac{1}{2}k_t(t,x)$$

доказано существование (в определённом классе) решения рассматриваемых задач.

В 1981 году в работе [29] Накао Митсухиро рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)-(\rho(t,x)u_{tx}(t,x)+\sigma(u_x(t,x)))_x=0 \quad (t\ge 0, 0\le x\le 1), \\ u(0,x)=\varphi(x)(0\le x\le 1), \quad u_t(0,x)=\psi(x) \quad (0\le x\le 1), \\ u(t,0)=u(t,1)=0 \quad (t\ge 0), \end{cases}$$

где $\rho(t,x)>0$; при определённых условиях на функции ρ,σ,φ и ψ доказано существование и единственность глобального достаточно гладкого классического решения рассматриваемой задачи.

В 1981 году в работе [30] Кожанова А.И., Ларькина Н.А. и Яненко Н.Н. доказано существование и единственность решения почти всюду задачи:

$$\begin{cases} \beta u_{tt}(t,x)+u_t(t,x)+\alpha u(t,x)u_x(t,x)-\dfrac{\partial}{\partial x}F(u_x(t,x))- \\ -\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x}F_1(u_x(t,x))=f(t,x)(0\le t\le T, a\le x\le b), \\ u(0,x)=\varphi(x)(a\le x\le b), \quad u_t(0,x)=\psi(x) \quad (a\le x\le b), \\ u(t,a)=u(t,b)=0 \quad (0\le t\le T), \end{cases} \tag{0.7}$$

где [a,b] – произвольный отрезок на оси x; α,β - некоторые постоянные, $\beta\ge 0$; $F'(\eta)$ - произвольного знака, $F_1'(\eta)>0$ $\forall\eta\in(-\infty,\infty)$, а оператор $L_0u=\beta u_{tt}+u_t-\dfrac{\partial}{\partial x}F(u_x)$ является квазилинейным оператором переменного типа.

Отметим, что в случае $\beta\ge 0, \alpha=0$, $F'(\eta)\ge 0$, $F_1'(\eta)>0$ уравнение (0.7) встречается в теории упругости, в теории неньютоновских жидкостей и изучалось рядом авторов. При различных требованиях роста и гладкости на функции $F(\eta), F_1(\eta)$ получены теоремы о разрешимости в целом смешанной задачи для уравнения (0.7) (см., например, [6],[9],[21]).

В случае $\beta=0, \alpha=1, F(\eta)=\mu\eta, F_1(\eta)=\varepsilon\eta^3$, где ε,μ – положительные постоянные, уравнение (0.7) представляет собой регуляризованное уравнение Бюргерса, исследованное в [30].

В случае $\beta=1, \alpha=0, F_1(\eta)=\ln\eta$ смешанная задача для уравнения (0.7) изучалась в [31]. При этом в области отрицательных значений на производную $F'(\eta)$ налагалось условие подчинения функции $F_1'(\eta)$, а на начальные данные – условие типа знакоопределённости.

В работе [32] рассматривались уравнения третьего порядка в случае, когда дифференциальный оператор второго порядка $L_0 u$ является строго гиперболическим при малых u. Доказано существование решений, обладающих малой нормой, если начальные данные малы в той же норме.

А в вышеупомянутой работе [30] условия типа малости на начальные данные и правую часть отсутствуют.

В 1982 году в работе [33] Кожанова А.И. исследованы условия разрешимости смешанной задачи

$$\begin{cases} \beta u_{tt}(t,x) - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \sigma_i(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x),\nabla u_t(t,x)) - \\ - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x_i} F_i(x,u_{x_i}(t,x)) + A(t,x,u(t,x),u_t(t,x),\nabla u(t,x),\nabla u_t(t,x)) + \\ + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_i(t,x,u(t,x),u_t(t,x),\nabla u(t,x)) = 0 \ (0 < t < T, x \in \Omega), \\ u(0,x) = \varphi(x) \ (x \in \Omega), u_t(0,x) = \psi(x) \ (x \in \Omega), \\ u(t,x)\big|_{\Gamma} = 0 \ (\Gamma \equiv (0,T) \times \partial\Omega), \end{cases}$$

где $0 < T < +\infty$, Ω – ограниченная n-мерная область с границей $\partial\Omega$, $\beta \geq 0$ - постоянная, $\sigma_i, F_i, A, A_i (i = \overline{1,n})$, φ, ψ - достаточно гладкие функции; доказана теорема существования решения почти всюду рассматриваемой задачи, для которого справедлива определённая априорная оценка.

В 1982 году в работе [34] Ларькина Н.А. рассмотрено квазилинейное уравнение в частных производных вида

$$\beta u_{tt} + u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_i} F_i(t,x,u_x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_i(t,x,u_x) = f(t,x), \quad (0.8)$$

где выражение

$$\beta u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(t,x,u_x)$$

есть параболический оператор; доказаны теоремы существования и единственности в целом в цилиндре обобщённых решений первой краевой задачи для уравнения (0.8), а также существование в целом обобщённого решения задачи Коши.

В 1982 году в работе [35] Эбихары Ю. рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \alpha\Delta u(t,x) - \Delta u_t(t,x) = \\ = f(t,x,u(t,x),u_t(t,x),\mathscr{D}u(t,x),\mathscr{D}u_t(t,x),\mathscr{D}^2u(t,x),\mathscr{D}^2u_t(t,x)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t>0, x\in\Omega), \\ u(0,x) = \varphi(x)(x\in\Omega), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (x\in\Omega), \\ u(t,x)\,|_{\Gamma} = 0 \quad (\Gamma \equiv (0,+\infty)\times\partial\Omega), \end{cases}$$

где α – постоянная, Ω – ограниченная n-мерная область с границей $\partial\Omega$, $\mathscr{D}u(t,x) \equiv (u_{x_1}(t,x),\cdots,u_{x_n}(t,x))$, $\mathscr{D}^2u(t,x) \equiv$

$\mathscr{D}^2u(t,x) \equiv (u_{x_1x_1}(t,x),\cdots,u_{x_1x_n}(t,x),\cdots,u_{x_nx_1}(t,x),\cdots,u_{x_nx_n}(t,x))$,

Δ – оператор Лапласа; при определённых специальных условиях относительно нелинейной функции f установлено существование некоторого (неограниченного) множества W в соответствующем пространстве С.Л.Соболева, такого, что если начальные данные φ и ψ принадлежат W, то рассматриваемая задача имеет решение при всех $t>0$.

В 1982 году в работе [36] Артюшина А.Н. рассмотрена задача:

+833

$$
\begin{cases}
u_{tt}(t,x)-\lambda\dfrac{\partial}{\partial x}\sigma(u_x(t,x),u_{tx}(t,x))-\mu\dfrac{\partial^2}{\partial t\partial x}F(u_x(t,x))=f(t,x) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (0\le t\le T,\ 0\le x\le 1), \\
u(0,x)=\varphi(x)\ (0\le x\le 1),\quad u_t(0,x)=\psi(x)\ \ (0\le x\le 1), \\
u_x(t,0)=u_x(t,1)=0\ \ (0\le t\le T),
\end{cases}
$$

где λ,μ – постоянные; при определённых условиях на функции σ, F, f, φ и ψ доказаны теоремы о существовании и единственности решения почти всюду рассматриваемой задачи.

В 1982 году в работе [37] Кожанова А.И. найдены условия разрешимости (в соответствующих классах) следующих двух задач:

$$
\begin{cases}
u_{tt}(t,x)+(-1)^n\mathscr{D}^nF(t,x,u(t,x),\mathscr{D}u(t,x),\cdots,\mathscr{D}^nu(t,x))+ \\
+(-1)^n\mathscr{D}^{2n}u_t(t,x)=f(t,x,u(t,x),\cdots,\mathscr{D}^{2n-1}u(t,x))(0\le t\le T,\ 0\le x\le 1), \\
u(0,x)=\varphi(x)\ (0\le x\le 1),\quad u_t(0,x)=\psi(x)\quad (0\le x\le 1), \\
\mathscr{D}^{2k}u(t,0)=\mathscr{D}^{2k}u(t,1)=0\ (\mathscr{D}^ku(t,o)=\mathscr{D}^ku(t,1)=0) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (k=0,1,\cdots,n-1;t\in[0,T]),
\end{cases}
$$

где $0<T<+\infty, n-$ натуральное число, $\mathscr{D}\equiv\dfrac{\partial}{\partial x}$. Кроме того, для первой задачи доказана также единственность решения.

В 1983 году в работе [38] Дорау Геновефа для уравнения

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x_i^2}-\lambda\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)=0\qquad (0\le t\le T, x\in\Omega)
$$

рассмотрены следующие две задачи:

$$
\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{\Gamma_0}=f_1(x),u(t,x)\Big|_{\sum_T}=f_2(t,x),\quad u(t,x)\Big|_{\Gamma_T}=f_3(x);
$$

$$
\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{\Gamma_0}=f_1(x),u(t,x)\Big|_{\sum_T}=f_2(t,x),\ u(t,x)\Big|_{\Gamma_0}=f_3(x)u(t,x)\Big|_{\Gamma_{t_0}},
$$

где $\lambda > 0$, $\Omega -$ n-мерная ограниченная область с границей $S, \Gamma_t = \{t\} \times \Omega$, $\sum_T = [0, T] \times S$, $0 < t_0 < T$. Получены теоремы существования и единственности регулярных решений этих задач.

В 1983 году в работе [39] Эбихары Ю. для каждого из уравнений

$$u_{tt}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma(u_x^2(t,x))u_x(t,x) + \rho(u(t,x))u_{tx}(t,x)) + f(t,x)$$

$$(t \geq 0, a \leq x \leq b),$$

$$u_{tt}(t,x) = u_{txx}(t,x) + \sigma(u(t,x), u_t(t,x), u_x(t,x), u_{tx}(t,x))u_{xx}(t,x) +$$

$$+ \rho(u(t,x), u_t(t,x), u_x(t,x))u_{txx}(t,x) + f(t,x) \quad (t \geq 0, a \leq x \leq b),$$

$$u_{tt}(t,x) = \sigma(u_{xx}^2(t,x))u_{xx}(t,x) + u_{txx}(t,x) + f(t,x) \ (t \geq 0, a \leq x \leq b)$$

рассмотрена задача

$$u(0,x) = \varphi(x)(a \leq x \leq b), u_t(0,x) = \psi(x)(a \leq x \leq b),$$

$$u(t,a) = u(t,b) = 0 \quad (t \geq 0);$$

при некоторых условиях на данные доказано, что каждая из этих трёх задач имеет единственное решение в классе

$$C^{(1)}([0,+\infty); \overset{0}{W}{}_2^1(a,b) \cap W^3(a,b)) \cap C^2([0,+\infty); \overset{0}{W}{}_2^1(a,b));$$

изучены также свойства решений этих задач.

В 1983 году в работе [40] Артюшина А.Н. рассмотрена задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(u_t(t,x)) + (-1)^n \mathscr{D}^n F(\mathrm{D}^n u(t,x)) - (-1)^n \mathscr{D}^{2n-2} u_t(t,x) = \\ \qquad = f(t,x) \quad (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1), \\ u(0,x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \\ \mathscr{D}^{2k} u(t,0) = \mathscr{D}^{2k} u(t,1) = 0 \quad (k = 0, \cdots, n-1; t \in [0,T]), \end{cases}$$

где $0<T<+\infty, n-$ натуральное число, $\mathscr{D}\equiv\dfrac{\partial}{\partial x}$; в работе для любых n, при некоторых условиях малости правой части и начальных данных, методом регуляризации доказано существование единственного глобального регулярного решения $u(t,x)$, такого, что

$$\mathscr{D}^{2n}u(t,x)\in L_\infty((0,T);L_2(0,1)),\mathscr{D}^{n}u_t(t,x)\in L_\infty((0,T);L_2(0,1)),$$

$$\mathscr{D}^{2n-1}u_t(t,x)\in L_2((0,T)\times(0.1)),u_{tt}(t,x)\in L_2((0,T)\times(0,1)).$$

В 1984 году в работе [41] Беркалиева З.Б. рассмотрена система уравнений

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}(A(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x})-\frac{\partial}{\partial x}S(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x})+k(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+$$

$$+f(u(t,x),\upsilon(t,x))+p(x)=0,$$

$$\frac{\partial\upsilon(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}(B(x)\frac{\partial\upsilon(t,x)}{\partial x})+g(u(t,x),\upsilon(t,x))+q(x)=0$$

при t>0 и 0<x<1 с нулевыми граничными условиями, причём $u(t,x)\in R^n,\upsilon(t,x)\in R^m$; при некоторых условиях на коэффициенты и нелинейные члены системы, основными из которых являются симметричность и положительная определённость матриц A(x) и B(x), неотрицательность константы ε, монотонность отображения S, имеющего линейный рост, и существование функции Ляпунова, доказано существование аттрактора, имеющего достаточно регулярную структуру, к которому с ростом времени стремятся семейства решений, отвечающие ограниченным множествам начальных значений в функциональном пространстве.

В работах [42]-[43],[44]-[45] и [46]-[48] доказаны теоремы единственности, существования, существования и единственности и непрерывной зависимости (в определённом смысле) от φ,ψ и $\mathscr{F}$ соответственно обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3). А в работах [49]-[52] доказаны теоремы единственности (в целом), существования (как в малом, так и в целом) и существования и единственности почти всюду и классического решений задач (0.4), (0.2),(0.3) и (0.5),(0.2),(0.3). Все результаты работ [42]-[52] включены в диссертацию [53] Шарифова Т.А., защищённую в 1985 году.

В 1986 году в работе [54] Данг Дин Хай рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(|u_{tx_i}(t,x)|^{\alpha} \cdot u_{tx_i}(t,x)) + \\ + f(u(t,x), u_t(t,x)) = 0 \qquad (0 \le t \le T, x \in \Omega), \\ u(0,x) = \varphi(x)(x \in \Omega), \quad u_t(0,x) = \psi(x)(x \in \Omega), \\ u(t,x) \,|_{\Gamma} = 0 \quad (\Gamma \equiv [0,T] \times \partial\Omega), \end{cases}$$

где $0 < T < +\infty$, $\Omega -$ n-мерная ограниченная область с границей $\partial\Omega$, Δ - оператор Лапласа, $\alpha \ge 0$ – постоянная, $f, \varphi, \psi -$ заданные функции; доказано существование и единственность решения рассматриваемой задачи; кроме того, при $\alpha = 0$, $f(0,0) = 0$ установлено экспоненциальное убывание u при $t \to +\infty$.

В 1987 году в работе [55] Сувейки И.В. доказана однозначная разрешимость основных смешанных задач для уравнения

$$u_{tt}(t,x) = \eta \Delta u_t(t,x) + \Delta u(t,x) \quad ((t,x) \in (0,T) \times \Omega),$$

где T>0, $\Omega -$ неограниченная область в $R^n (n \ge 2)$ с границей $\partial\Omega$ класса C^{∞}, представляющей собой компакт, и $\eta > 0 -$ постоянная; в функциональных пространствах с конечным интегралом энергии найден первый член асимптотики обобщённых решений при $\eta \to +0$. Если же начальные данные финитны и бесконечно гладкие, то дана асимптотика при большом времени классических решений и установлена стабилизация к нулю интеграла энергии.

В 1987 году в работе [56] Артюшина А.Н. доказана теорема существования обобщённого решения задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \dfrac{\partial}{\partial x}\sigma(u_x(t,x), u_{tx}(t,x)) = f(t,x) \quad ((t,x)\in(0,T)\times(0,1)), \\ u(0,x) = \varphi(x)(0\le x\le 1), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (0\le x\le 1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad (0\le t\le T). \end{cases}$$

Работы [57]-[61] посвящены изучению вопросов существования и единственности почти всюду и классического решений следующей многомерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial t} L(u(t,x)) = \\ = F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x)) \\ \qquad\qquad (t\in[0,T], x\in\overline{\Omega}), & (0.9) \\ u(0,x) = \varphi(x)(x\in\Omega), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (x\in\overline{\Omega}), & (0.10) \\ u(t,x)\,\big|_{\Gamma} = 0 \quad (\Gamma\equiv[0,T]\times\partial\overline{\Omega}), & (0.11) \end{cases}$$

где $0 < T < +\infty$, $x = (x_1,\cdots,x_n)$, Ω – n-мерная ограниченная область с границей $\partial\Omega$,

$$L(u(t,x)) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j}) - a(x)u(t,x), \qquad (0.12)$$

причём в $\overline{\Omega}$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), a(x)\ge 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \alpha\cdot\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 (\alpha = const > 0; \xi_i\in(-\infty,\infty)), \qquad (0.13)$$

φ, ψ, F – заданные функции, а $u(t,x)$ – искомая функция, кроме того,

$$u_x \equiv (u_{x_1},\cdots,u_{x_n}), u_{xx} \equiv (u_{x_1x_1},\cdots,u_{x_1x_n},\cdots,u_{x_nx_1},\cdots,u_{x_nx_n}). \qquad (0.14)$$

В работах [57] и [58] для любых размерностей n доказаны: теорема единственности в целом, теорема существования в малом и теорема существования в целом решения почти всюду задачи (0.9)-(0.11).

А в работах [59] и [60] для классического решения задачи (0.9)-(0.11) получены следующие результаты:

1) для любых размерностей n доказана теорема единственности в целом;
2) для любых размерностей n доказана теорема существования в малом;
3) для размерности $n=1$ доказана теорема существования в целом;
4) в случае $F = F(t,x,u,u_t,u_x)$ для размерностей $n \leq 6$ доказана теорема существования в целом;
5) в случае $F = F(t,x,u)$ для размерностей $n \leq 10$ доказана теорема существования в целом.

Все результаты работ [57]-[60] включены в диссертацию [62] Алиева С.Дж., защищённую в 1987 году.

В 1988 году в работе [63] Лаптева Г.И. изучено уравнение

$$w_{tt}(t,x) = a(t,x,w(t,x),w_x(t,x),w_{tx}(t,x))w_{txx}(t,x) +$$
$$+ b(t,x,w(t,x),w_t(t,x),w_{tx}(t,x)),$$

которое, заменой $w_t = u$ приводится к виду

$$u_t(t,x) = a(t,x,\int_0^t u(\tau,x)d\tau, \int_0^t u_x(\tau,x)d\tau, u_x(t,x))\, u_{xx}(t,x) +$$
$$+ b(t,x,\int_0^t u(\tau,x)d\tau, u(t,x), u_x(t,x)).$$

Для этого уравнения ставится начально-краевая задача и доказывается существование и единственность классического решения методами, основанными на применении принципа максимума для параболических уравнений. Уравнение содержит интегралы от неизвестной функции в своих коэффициентах, что составляет особенность задачи, так как эти интегралы определяют нелокальные операторы.

В 1988 году в работе [64] Лаптева Г.И. в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ изучено уравнение

$$u_{tt}(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(u_x(t,x))u_{x_ix_j}(t,x)+$$

$$+\lambda\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(u_x(t,x))u_{x_ix_j}(t,x)+f(t,x),$$

которое переписывается в виде

$$u_t(t,x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(u_x(t,x))u_{x_ix_j}(t,x)+$$

$$+\lambda\int_0^t\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(u_x(\tau,x))u_{x_ix_j}(\tau,x)d\tau+g(t,x).$$

К последнему уравнению применяются методы, основанные на принципе максимума для параболических уравнений, что приводит к условиям существования классического решения рассматриваемого уравнения.

В 1988 году в работе [65] Лин Ян Пинг рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)-\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(t,x)u_{x_i}(t,x))-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(b_{ij}(t,x)u_{x_i}(t,x))= \\ =\dfrac{\partial}{\partial t}F(t,x,u(t,x),u_x(t,x)) \quad в \quad Q_T, \\ u(0,x)=\varphi(x), \quad u_t(0,x)=\psi(x) \quad в \quad \Omega, \\ u(t,x)=0 \qquad в \qquad (0,T)\times\partial\Omega, \end{cases}$$

где $0<T<+\infty$, Ω – ограниченная область в R^n с границей $\partial\Omega$ класса C^2, $Q_T\equiv(0,T)\times\Omega$,

$$\varphi(x)\in \overset{0}{W}{}_2^2(\Omega),\quad \psi(x)\in L_2(\Omega),\quad a_{ij}(t,x)\in C^{1,1}(\overline{Q}_T),\quad a_{ij}(t,x)=a_{ji}(t,x),$$

$$a_0|\xi|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j\le a_1|\xi|^2,\quad b_{ij}(t,x),\quad \frac{\partial}{\partial x_j}b_{ij}(t,x)$$

измеримы и ограничены в $Q_T, F(t,x,p,q)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по p и q равномерно в $Q_T\times(-\infty,\infty)^{n+1}$. С помощью аппроксимации доказана теорема существования слабого (из $W^{1,2}_{t,x,2}(Q_T)$) решения этой задачи, его единственность и непрерывная зависимость от начальных данных и правой части уравнения.

В 1988 году в работе [66] Лиу Яченг, Лиу Даоченг изучена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)-\alpha\Delta u_t(t,x)-\Delta u(t,x)=f(u(t,x)) \quad \text{в} \quad (0,\infty)\times\Omega, \\ u(0,x)=\varphi(x), \quad u_t(0,x)=\psi(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u(t,x)=0 \quad \text{в} \quad (0,\infty)\times\partial\Omega, \end{cases}$$

где $\alpha>0$ – постоянная, $\Omega\subset R^n\,(n=1,2,3)$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2. Показано, что если $\varphi(x),\psi(x)\in$ $\in W_2^2(\Omega)\bigcap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $f(u)$ – ограниченная сверху функция класса C^1, то существует единственное сильное глобальное решение этой задачи. Установлены также оценки этого решения.

В 1988 году в работе [67] Андраде Н.Г. рассмотрено уравнение

$$u_{tt}(t,x)-(m_0+m_1\cdot\int_\Omega|\nabla u(t,x)|^2dx)\Delta u(t,x)+\alpha\, u(t,x)+$$
$$+\beta\Delta u_t(t,x)=f(t,x)\;(t\in(0,T),x\in\Omega)$$

с условиями

$$u(0,x)=u(T,x),u_t(0,x)=u_t(T,x) \text{ в } \Omega, u(t,x)=0 \text{ в } (0,T)\times\partial\Omega,$$

где $0<T<+\infty$, $\Omega\subset R^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$,

$$m_0>0,\; m_1>0,\; \alpha>0,\; \alpha\neq k^2\cdot\left(\frac{\pi}{T}\right)^2,\; f(t,x)\in C([0,T];L_2(\Omega)).$$

Доказано существование по крайней мере одного слабого решения $u(t,x)$ этой задачи, обладающего свойствами

$$u_t(t,x)\in L_\infty((0,T);\,W_2^2(\Omega)\bigcap\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),\; u_{tt}(t,x)\in L_\infty((0,T);L_2(\Omega)).$$

В 1988 году в работе [68] Кубашевского Владислава рассмотрена задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(u_t(t,x)-u_{xx}(t,x))=f(t,x) \quad (t\in(0,T), x\in(-a,a)), \\ u(0,x)=\varphi(x)\,(-a<x<a), \quad u_t(0,x)-u_{xx}(0,x)=\psi(x)\,(-a<x<a), \\ u(t,-a)=h_1(t)\;(0<t<T),\; u_x(t,a)=h_2(t) \quad (0<t<T); \end{cases}$$

с помощью функции Грина построено решение этой задачи и доказана его единственность.

В 1989 году в работе [69] Жамалова Р.С. рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)-u_{txx}(t,x)-\dfrac{\partial}{\partial x}F(u_x(t,x))=0 \quad (0\le t\le T, x\ge 0), \\ u(0,x)=\varphi(x) \quad (x\ge 0), \quad u_t(0,x)=\psi(x)\;(x\ge 0), \\ u_t(t,0)-a\cdot u_x(t,0)=0 \quad (0\le t\le T), \end{cases}$$

где $0<T<+\infty$, $a-$ постоянная, F,φ,ψ – заданные функции. При определённых условиях на функции F,φ и ψ доказано существование единственного решения $u(t,x)$ этой задачи, для которого справедлива оценка

$$\|u(t,x)\|_{w_2^2(Q_T)}+\|u_{txx}(t,x)\|_{L_2(Q_T)}\le C\cdot(\|\varphi(x)\|_{w_2^2(0,\infty)}+\|\psi(x)\|_{w_2^2(0,\infty)}),$$

где $Q_T\equiv(0,T)\times(0,\infty)$, а $C>0-$постоянная.

В 1990 году в работе [70] Тсуджиока Кунио рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)-2\beta u_{txx}(t,x)-\alpha u_{xx}(t,x)=0 \quad (t\ge 0, 0\le x\le 1), \\ u(0,x)=\varphi(x)(0\le x\le 1), \quad u_t(0,x)=\psi(x) \quad (0\le x\le 1), \\ u(t,0)=0\;(t\ge 0), u_x(t,1)+ku_{xx}(t,1)=0 \quad (t\ge 0), \end{cases}$$

где α,β,k - положительные постоянные; доказаны теоремы существования и единственности слабого решения этой задачи.

А теперь перейдем к краткому описанию содержания данной книги, которая состоит из введения и двух глав.

Во введении дается постановка задачи, изучению которой посвящена данная книга, подчеркивается цель данной книги и дается краткий обзор некоторых работ, непосредственно или в определённом смысле связанных с тематикой данной книги.

Глава I, состоящая из шести параграфов, посвящена изучению вопросов существования, единственности и непрерывной зависимости (в определённом смысле) от φ, ψ и $\mathscr{F}$ обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3).

В §1 главы I введены некоторые банаховы пространства, нужные для исследования задачи (0.1)-(0.3), и в них установлен критерий компактности множеств; введены определения обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3); установлены некоторые вспомогательные факты; кроме того, приняты некоторые обозначения, используемые в дальнейшем.

В §2 главы I доказаны теоремы о единственности обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3).

В §3 главы I с помощью комбинированного принципа М.А.Красносельского и принципа ненулевого вращения доказаны различные теоремы существования обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3).

В §4 главы I методом последовательных приближений доказаны теоремы существования и единственности обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3).

В §5 главы I, комбинированием метода последовательных приближений с принципом Шаудера, доказаны теоремы существования обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3), не вытекающие из результатов §3 данной главы.

В последнем §6 главы I с помощью неравенства Беллмана доказаны теоремы о непрерывной зависимости (в определённом смысле) от φ, ψ и $\mathscr{F}$ обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3).

Глава II, состоящая из четырех параграфов, посвящена изучению вопросов единственности и существования почти всюду и классического решений задачи (0.4), (0.2), (0.3).

В §1 главы II доказана теорема о единственности почти всюду и классического решений задачи (0.4), (0.2), (0.3).

В §2 главы II, комбинированием метода последовательных приближений с принципом Шаудера, доказаны теоремы существования в малом почти всюду и классического решений задачи (0.4), (0.2), (0.3).

В §3 главы II, пользуясь результатами предыдущего параграфа, методами априорных оценок доказаны теоремы существования в целом почти всюду и классического решений задачи (0.4), (0.2), (0.3).

В последнем §4 главы II методами априорных оценок доказаны теоремы существования в целом почти всюду и классического решений задачи (0.5), (0.2), (0.3).

Следует отметить, что результаты главы II не следуют из абстрактных результатов главы I, а дополняют результаты главы I, относящиеся к почти всюду и классического решениям задачи (0.1)-(0.3).

В заключение введения отметим, что в данной книге все величины вещественные, все функции действительнозначные, а интегралы всюду понимаются в смысле Лебега.

ГЛАВА I

Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью

Данная глава посвящена исследованию следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \alpha u_{txx}(t,x) = \mathscr{F}(u(t,x)) \quad (0 \le t \le T \quad 0 \le x \le \ell), & (1.1) \\ u(0,x) = \varphi(x)\,(0 \le x \le \ell), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (0 \le x \le \ell), & (1.2) \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0 \quad (0 \le t \le T), & (1.3) \end{cases}$$

где $0 < T < +\infty, 0 < \ell < +\infty; \alpha > 0 -$ фиксированное число; φ, ψ - заданные функции, $\mathscr{F}$ – заданный, вообще говоря, нелинейный оператор, а $u(t,x) -$ искомая функция.

В данной главе введены понятия обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3); доказаны теоремы единственности обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3); с помощью принципов М.А.Красносельского (см.[71], стр. 1234), Шаудера и ненулевого вращения (см, например, [72], стр.322) доказаны теоремы существования обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3); с помощью метода последовательных приближений доказаны теоремы существования и единственности обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3); кроме того, с помощью неравенства Р.Беллмана (см, например, [73], стр.188-189) доказаны теоремы о непрерывной зависимости (в определённом смысле) от начальных функций $\varphi(x), \psi(x)$ и нелинейного оператора $\mathscr{F}$ обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3).

§1. Вспомогательные факты.

В этом параграфе с целью исследования задачи (1.1)-(1.3) введём серию банаховых пространств, примем определения обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3) и установим ряд новых вспомогательных фактов, используемых во всей книге.

1. Обозначим через $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \tag{1.4}$$

рассматриваемых на множестве $[0,T]\times[0,\ell]$, для которых все функции $u_n(t)\in C^{(\ell)}([0,T])$ и

$$J_T(u)\equiv\sum_{i=0}^{\ell}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<+\infty,$$

где $\ell\ge 0$- целое число, $\alpha_i\ge 0(i=\overline{0,\ell}), 1\le\beta_i\le 2(i=\overline{0,\ell})$ - фиксированные числа. В этом множестве операции сложения и умножения на числа (действительные) определим обычным образом; под нулевым элементом этого множества будем понимать функцию $u(t,x)\equiv 0$ на $[0,T]\times[0,l]$, а норму в этом множестве определим формулой

$$\|u(t,x)\|_{B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}}\equiv\sum_{i=0}^{\ell}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}. \tag{1.5}$$

Очевидно, что все эти пространства банаховы. Действительно, справедливость первых двух аксиом нормы очевидна, а справедливость третьей аксиомы нормы легко устанавливается с помощью сумматорного неравенства Минковского; следовательно, $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}$ является линейным нормированным пространством. А его полноту докажем. Итак, пусть

$$u_k(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{n,k}(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \quad (k=1,2,\cdots)$$

- любая последовательность, фундаментальная в $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер k_ε, что

$$\left\|u_k(t,x)-u_m(t,x)\right\|_{B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\ell}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u^{(i)}_{n,k}(t)-u^{(i)}_{n,m}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<\varepsilon \quad \forall k,m\ge k_\varepsilon. \quad (1.6)$$

Следовательно, при любом фиксированном $n(n=1,2,\cdots)$:

$$\max_{0\le t\le T}\left|u^{(i)}_{n,k}(t)-u^{(i)}_{n,m}(t)\right|\equiv\left\|u^{(i)}_{n,k}(t)-u^{(i)}_{n,m}(t)\right\|_{C([0,T])}<\varepsilon$$

$$(i=\overline{0,\ell})\forall k,m\ge k_\varepsilon. \quad (1.7)$$

А это означает, что при любом фиксированном $n(n=1,2,\cdots)$ последовательность $\{u_{n,k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна и, следовательно, в силу полноты $C^{(\ell)}([0,T])$, сходится в пространстве $C^{(\ell)}([0,T])$:

$$u_{n,k}(t)\xrightarrow{C^{(\ell)}([0,T])}u_{n,0}(t)\in C^{(\ell)}([0,T]) \quad при \quad k\to\infty. \quad (1.8)$$

Далее, в силу (1.6), для любого фиксированного номера N:

$$\sum_{i=0}^{\ell}\left\{\sum_{n=1}^{N}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u^{(i)}_{n,k}(t)-u^{(i)}_{n,m}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<\varepsilon \quad \forall k,m\ge k_\varepsilon. \quad (1.9)$$

Пользуясь соотношением (1.8) и переходя к пределу при $m\to\infty$ в (1.9), получаем:

$$\sum_{i=0}^{\ell}\left\{\sum_{n=1}^{N}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u^{(i)}_{n,k}(t)-u^{(i)}_{n,0}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}\le\varepsilon \quad \forall k\ge k_\varepsilon. \quad (1.10)$$

Отсюда, в силу произвольности N (или одно и тоже, переходя к пределу при $N\to\infty$), получаем:

$$\sum_{i=0}^{\ell}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_{n,k}^{(i)}(t)-u_{n,0}^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}\le\varepsilon\quad\forall k\ge k_\varepsilon. \quad (1.11)$$

Примем обозначение:

$$u_0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{n,0}(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x. \quad (1.12)$$

Так как $u_0(t,x)=\left[u_0(t,x)-u_{k_\varepsilon}(t,x)\right]+u_{k_\varepsilon}(x)$ и, в силу (1.11), $u_0(t,x)-u_{k_\varepsilon}(t,x)\in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots\beta_\ell,T}$, а также, $u_{k_\varepsilon}(t,x)\in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots\beta_\ell,T}$, то получаем, что

$$u_0(t,x)\in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots\beta_\ell,T}.$$

Таким образом, в силу (1.11), для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер k_ε, что

$$\left\|u_k(t,x)-u_0(t,x)\right\|_{B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots\beta_\ell,T}}\le\varepsilon\quad\forall k\ge k_\varepsilon.$$

А это означает, что последовательность $u_k(t,x)$ сходится в $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots\beta_\ell,T}$ к элементу $u_0(t,x)\in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots\beta_\ell,T}$. Этим полнота и, следовательно, банаховость пространств $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots\beta_\ell,T}$ доказана.

Отметим, что из введённой серии банаховых пространств $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots\beta_\ell,T}$ мы в данной книге будем, по существу, пользоваться лишь пространствами

$$B^0_{2,T},\quad B^1_{2,T},\quad B^2_{2,T},\quad B^3_{2,T};$$
$$B^{2,0}_{2,2,T},\quad B^{2,1}_{2,2,T},\quad B^{3,2}_{2,2,T},\quad B^{4,3}_{2,2,T};$$
$$B^{2,1}_{1,1,T},\quad B^{3,2}_{1,1,T}.$$

В дальнейшем для функций $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots\beta_\ell,T}$ часто будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots\beta_\ell,t}}\equiv\sum_{i=0}^{\ell}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|u_n^{(i)}(\tau)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}\ (t\in[0,T]). \quad (1.13)$$

Легко показать, что любой функции $u(t,x) \in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}$ функция

$$U(t) = \|u\|_{B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,t}}$$

неотрицательна, неубывающая и непрерывна на [0,T].

Далее, для функции $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{n\pi}{\ell} x$ функцию $u_n(t)(n=1,2,\cdots)$ назовём её n-ой компонентой. Пусть $\mathcal{M} \subset B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}$ - заданное непустое множество. Обозначим через $\mathcal{M}_n(n=1,2,\cdots)$ совокупность n-ых компонент всех элементов множества M. Справедлива следующая

Теорема 1.1. Для компактности множества $\mathcal{M} \subset B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}$ в $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) для каждого $n(n=1,2,\cdots)$ множество $\mathcal{M}_n$ компактно в $C^{(\ell)}([0,T])$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N_ε, один и тот же для всех $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{n\pi}{\ell} x \in M$, такой, что

$$\sum_{i=0}^{\ell} \left\{ \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0\le t\le T} \left| u_n^{(i)}(t) \right| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < \varepsilon. \qquad (1.14)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть множество $\mathcal{M} \subset B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}$ компактно в $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}$. Так как из соотношения

$$B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T} \ni \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k}(t) \sin\frac{n\pi}{\ell} x \xrightarrow{B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,0}(t) \sin\frac{n\pi}{\ell} x \in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T} (k\to\infty)$$

следует, что для каждого фиксированного $n(n=1,2,\cdots)$

$$u_{n,k}(t) \xrightarrow{C^{(\ell)}([0,T])} u_{n,0}(t) \quad при \quad k\to\infty,$$

го из компактности множества $\mathcal{M}$ в $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}$ следует, что для каждого фиксированного $n(n=1,2,\cdots)$ множество $\mathcal{M}_n$ компактно в $C^{(\ell)}([0,T])$. Следовательно, для множества $\mathcal{M}$ выполнено условие a) данной теоремы. Далее, пусть $\varepsilon>0$ - любое заданное число. Так как, по предположению, множество $\mathcal{M}$ компактно в $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}$, то для него существует в $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}$ конечная $\frac{\varepsilon}{2}$ – сеть:

$$u_k(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}u_{n,k}(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x(k=1,\cdots,m_\varepsilon), \tag{1,15}$$

т.е. для каждого $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\in\mathcal{M}$ существует номер $k_u(1\le k_u\le m_\varepsilon)$, такой, что

$$\left\|u-u_{k_u}\right\|_{B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}}\equiv\sum_{i=0}^{\ell}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)-u_{n,k_u}^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.16}$$

Так как функции (1.15) принадлежат пространству $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\dots,\beta_\ell,T}$ и их число конечное, то, как видно из определения нормы (1.5), существует номер N_ε, такой, что

$$\sum_{i=0}^{\ell}\left\{\sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_{n,k}^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<\frac{\varepsilon}{2}\quad(k=1,\cdots,m_\varepsilon). \tag{1.17}$$

Тогда из (1.16) и (1.17) следует, что для каждого $u(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\in\mathcal{M}$:

$$\sum_{i=0}^{\ell}\left\{\sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}\le$$

$$\le\sum_{i=0}^{\ell}\left\{\sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)-u_{n,k_u}^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}+$$

$$+\sum_{i=0}^{\ell}\left\{\sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_{n,k_u}^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<\varepsilon,$$

т.е. для множества $\mathcal{M}$ выполнено условие *б*) данной теоремы. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для множества $\mathcal{M}\subset B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\ldots,\beta_\ell,T}$ выполнены условия *а*) и *б*) данной теоремы. Для каждой функции $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\in\mathcal{M}$ примем обозначение

$$u_\varepsilon(t,x)=\sum_{n=1}^{N_\varepsilon-1}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

причём, не нарушая общности, будем считать, что $N_\varepsilon\ge 2$. Совокупность всех этих функций $u_\varepsilon(t,x)$ обозначим через $\mathcal{M}_\varepsilon$. Очевидно, что $\mathcal{M}_\varepsilon\subset B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\ldots,\beta_\ell,T}$ и, в силу предположения *а*), множество $\mathcal{M}_\varepsilon$ компактно в $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\ldots,\beta_\ell,T}$. По построению и в силу предположения *б*), для каждой $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\in\mathcal{M}$

$$\left\|u-u_\varepsilon\right\|_{B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\ldots,\beta_\ell,T}}=\sum_{i=0}^{\ell}\left\{\sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<\varepsilon.$$

Таким образом, множество $\mathcal{M}_\varepsilon\subset B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\ldots,\beta_\ell,T}$ образует для множества $\mathcal{M}\subset B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\ldots,\beta_\ell,T}$ компактную ε – сеть. Тогда, в силу одного из следствий известной теоремы Хаусдорфа о критерии компактности множеств в метрических пространствах, множество $\mathcal{M}$ компактно в $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_\ell}_{\beta_0,\ldots,\beta_\ell,T}$. Достаточность доказана.

Таким образом, теорема доказана полностью.

Из теоремы 1.1, в частности, следует, что все вложения

$$B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_{\ell-1},\alpha_\ell}_{\beta_0,\ldots,\beta_{\ell-1},\beta_\ell,T}\subset B^{\alpha_0-\varepsilon_0,\ldots,\alpha_{\ell-1}-\varepsilon_{\ell-1}}_{\beta_0,\ldots,\beta_{\ell-1},T}$$

$$(\ell\ge 1;\alpha_i>0,\varepsilon_i>0,\alpha_i-\varepsilon_i\ge 0\ \ (i=\overline{0,\ell-1}),\alpha_\ell\ge 0)$$

вполне непрерывны.

2. Введём следующие определения:

Определение 1.1. Обобщённым решением задачи (1.1)-(1.3) назовём функцию $u(t,x)$, принадлежащую пространству $B^{2,1}_{2,2,T}$, принимающую начальные значения (1.2) в обычном смысле и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^\ell \left\{ u_t(t,x)\cdot V_t(t,x) - \alpha u_{xx}(t,x)\cdot V_t(t,x) + \mathcal{F}(u(t,x))\cdot V(t,x) \right\} dxdt -$$

$$-\alpha\int_0^\ell \varphi''(x)\cdot V(0,x)dx + \int_0^\ell \psi(x)\cdot V(0,x)dx = 0 \qquad (1.18)$$

для любых функций $V(t,x)$, обладающих свойствами: $V(T,x)=0$ для почти всех $x\in[0,\ell]$, $V(0,x)\in L_2(0,\ell)$, $V(t,x)\in L_2(\mathcal{D}_T)$, $\|V_t(t,x)\|_{L_2(0,\ell)}\in L(0,T)$, и интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^\ell \{u_t(t,x)\cdot V_t(t,x) - \alpha u_{tx}(t,x)\cdot V_x(t,x) +$$

$$+\mathcal{F}(u(t,x))\cdot V(t,x)\}\cdot dxdt + \int_0^\ell \psi(x)\cdot V(0,x)dx = 0 \qquad (1.19)$$

для любых функций $V(t,x)$, обладающих свойствами: $V(T,x)=0$ для почти всех $x\in[0,\ell]$, $V(t,0)=V(t,\ell)=0\ \forall\, t[0,T]$, $V(0,x)\in L_2(0,\ell)$, $V(t,x)\in L_2(\mathcal{D}_T)$ и $V_t(t,x)\in L(\mathcal{D}_T)$, где $\mathcal{D}_T\equiv[0,T]\times[0,\ell]$.

Замечание 1.1. Как видно из структуры пространства $B^{2,1}_{2,2,T}$, для любой функции $u(t,x)\in B^{2,1}_{2,2,T}$:

$$u(t,x)\in C(\mathcal{D}_T), u_t(t,x)\in C(\mathcal{D}_T), u_x(t,x)\in C(\mathcal{D}_T),$$

$$u_{tx}(t,x)\in C([0,T]; L_2(0,\ell)), u_{xx}(t,x)\in C([0,T]; L_2(0,\ell)).$$

Кроме того, очевидно, что $\forall u(t,x)\in B^{2,1}_{2,2,T}$:

$$u(t,0)=u(t,\ell)=0 \quad \forall t\in[0,T].$$

Поэтому обобщённое решение $u(t,x)$ задачи (1.1)-(1.3) удовлетворяет не только начальным условиям (1.2), но и граничным условиям (1.3) в обычном смысле.

Определение 1.2. Решением почти всюду задачи (1.1)-(1.3) назовём функцию $u(t,x)$, непрерывную в замкнутой области $\mathscr{D}_T = [0,T]\times[0,\ell]$ вместе с производными $u_t(t,x), u_x(t,x), u_{tx}(t,x)$ и $u_{xx}(t,x)$, имеющую производные $u_{tt}(t,x)$ и $u_{txx}(t,x)$ принадлежащие пространству $L_2(\mathscr{D}_T)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду в $\mathscr{D}_T$ и принимающую значения (1.2) и (1.3) в обычном смысле.

Определение 1.3. Классическим решением задачи (1.1)-(1.3) назовём функцию $u(t,x)$, непрерывную в замкнутой области $\mathscr{D}_T$ вместе со своими производными $u_t(t,x), u_x(t,x)$, $u_{tt}(t,x), u_{tx}(t,x), u_{xx}(t,x), u_{txx}(t,x)$ и удовлетворяющую всем условиям (1.1)-(1.3) в обычном смысле.

3.Примем следующие обозначения:

Обозначим через E_{x^0} пространство $L_2(\mathscr{D}_T)$.

Обозначим через E_{x^1} совокупность всех функций $u(t,x)$, непрерывных в замкнутой области $\mathscr{D}_T$, имеющих производную $u_x(t,x) \in L_2(\mathscr{D}_T)$ и удовлетворяющих условиям (1.3), с нормой

$$\|u(t,x)\|_{E_{x^1}} = \|u(t,x)\|_{C(\mathrm{D}_T)} + \|u_x(t,x)\|_{L_2(\mathrm{D}_T)}.$$

Обозначим через E_{x^2} совокупность всех функций $u(t,x)$, непрерывных в замкнутой области $\mathscr{D}_T$ вместе с производной $u_x(t,x)$, имеющих производную $u_{xx}(t,x) \in L_2(\mathscr{D}_T)$ и удовлетворяющих условиям (1.3), с нормой

$$\|u(t,x)\|_{E_{x^2}} = \|u(t,x)\|_{C(\mathscr{D}_T)} + \|u_x(t,x)\|_{C(\mathscr{D}_T)} + \|u_{xx}(t,x)\|_{L_2(\mathscr{D}_T)}.$$

Легко видеть, что все эти пространства банаховы.

Далее, обозначим через G_1 класс всех функций $u(t,x)$, для которых $u(t,x), u_t(t,x), u_x(t,x), u_{tx}(t,x), u_{xx}(t,x) \in C(\mathscr{D}_T), u_{tt}(t,x)$,

$u_{txx}(t,x)\in L_2(\mathscr{D}_T)$ и $\forall t\in[0,T]$ $u(t,0)=u(t,\ell)=0$.

А через G_2 обозначим класс всех функций $u(t,x)$, для которых $u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tt}(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x)$, $u_{txx}(t,x)\in C(\mathscr{D}_T)$ и $\forall t\in[0,T]$ $u(t,0)=u(t,\ell)=0$.

4.Очевидно, что каждое обобщённое (и тем более, почти всюду и классическое) решение задачи (1.1)-(1.3) имеет вид:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \tag{1.20}$$

где $u_n(t)=\frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}u(t,x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx$ - коэффициенты Фурье решения

$u(t,x)$ по полной в $L_2(0,\ell)$ системе $\left\{\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Легко видеть, что после формального применения схемы метода Фурье нахождение функций $u_n(t)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода:

$$u_n(t)=\varphi_n+\frac{\ell^2}{\alpha n^2\pi^2}\left[1-\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t\right)\right]\psi_n+\frac{2\ell}{\alpha n^2\pi^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^{\ell}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot$$

$$\cdot\left\{1-\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\right\}\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau(n=\overline{1,\infty};t\in[0,T]), \tag{1.21}$$

где

$$\varphi_n=\frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx,\qquad \psi_n=\frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx.$$

Из системы (1.21) легко получить, что

$$u_n'(t)=\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t\right)\psi_n+\frac{2}{\ell}\int\limits_0^t\int\limits_0^{\ell}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau, \tag{1.21a}$$

$$u_n''(t)=-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\exp(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t)\psi_n-\frac{2\alpha n^2\pi^2}{\ell^3}\int_0^t\int_0^\ell \mathscr{F}(u(\tau,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]d\xi d\tau+\frac{2}{\ell}\int_0^\ell \mathscr{F}(u(t,\xi))\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\, d\xi. \qquad (1.21_б)$$

В этой главе нам придется наряду с системой (1.21) исследовать следующую систему, получаемую из системы (1.21) путём интегрирования по частям по ξ один раз в её правой части, при предположении, что $\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\in E_{x^1}$:

$$u_n(t)=\varphi_n-\frac{\ell^2}{\alpha n^2\pi^2}\left[1-\exp(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t)\right]\psi_n+\frac{2\ell^2}{\alpha n^3\pi^3}\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot$$

$$\cdot\left\{1-\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\right\}\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau(n=1,2,\cdots;t\in[0,T]).(1.22)$$

Из системы (1.22) легко получить, что:

$$u_n'(t)=\exp(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t)\psi_n+\frac{2}{n\pi}\int_0^t\int_0^\ell\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau, \qquad (1.22a)$$

$$u_n''(t)=-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\exp(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t)\psi_n-\frac{2\alpha n\pi}{\ell^2}\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi\cdot\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]d\xi d\tau+\frac{2}{n\pi}\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(t,\xi))\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi=-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t\right)\psi_n-$$

$$-\frac{2\alpha n\pi}{\ell^2}\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]d\xi d\tau + \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \mathcal{F}(u(t,\xi))\cdot \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi. \quad (1.22_б)$$

Будем пользоваться ещё следующей системой, получаемой из системы (1.21) путём интегрирования по частям по ξ два раза в её правой части, при предположении $\mathcal{F}(u(\tau,\xi)) \in E_{x^2}$:

$$u_n(t) = \varphi_n + \frac{\ell^2}{\alpha n^2\pi^2}\left[1-\exp(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t)\right]\psi_n -$$

$$-\frac{2\ell^3}{\alpha n^4\pi^4}\int_0^t\int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot\left\{1-\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau (n=1,2,\cdots; t\in[0,T]). \quad (1.23)$$

Из системы (1.23) легко получить, что:

$$u_n'(t) = \exp(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t)\psi_n - \frac{2\ell}{n^2\pi^2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau, (1.23a)$$

$$u_n''(t) = -\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\exp(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t)\psi_n + \frac{2\alpha}{\ell}\int_0^t\int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{F}(u(\tau,\xi)))\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau - \frac{2\ell}{n^2\pi^2}\int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{F}(u(t,\xi))\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi = -\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t\right)\psi_n + \frac{2\alpha}{\ell}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau+$$

$$+\frac{2}{\ell}\int_0^\ell \mathscr{F}(u(t,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi. \qquad (1.23_б)$$

Исходя из определения обобщённого решения задачи (1.1)-(1.3), доказывается следующая

Лемма 1.1. Если $u(t,x)$ является обобщённым решением задачи (1.1)-(1.3) и $\mathscr{F}(u(t,x))\in L(\mathscr{D}_T)$, то функции $u_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell u(t,x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx$, т.е. коэффициенты Фурье функции $u(t,x)$ по системе $\left\{\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяют на $[0,T]$ счётной системе (1.21).

Доказательство. Так как функция $u(t,x)$ является обобщённым решением задачи (1.1)-(1.3), то, в частности, она удовлетворяет интегральному тождеству (1.18) для любой функции $V(t,x)$ вида

$$V(t,x)=\begin{cases}\frac{2}{\ell}(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{\ell}x & при \quad 0\le t\le\tau,\ x\in[0,\ell],\\ 0 & при \quad \tau<t\le T,\ x\in[0,\ell],\end{cases}$$

где $n=\overline{1,\infty}$; $\tau\in[0,T]$.

Подставив эту функцию $V(t,x)$ в тождество (1.18), получаем, что для любых $(n=\overline{1,\infty})$ и $\tau\in[0,T]$:

$$\int_0^\tau\left\{u_n'(t)-\alpha\int_0^\ell u_{xx}(t,x)\frac{2}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx+(t-\tau)\int_0^\ell\mathscr{F}(u(t,x))\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{2}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx\right\}dt+\alpha\tau\int_0^\ell\varphi''(x)\frac{2}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx-$$

$$-\tau\int_0^{\ell}\psi(x)\frac{2}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=0.$$

Из последнего тождества, пользуясь соотношениями

$$\int_0^{\ell}u_{xx}(t,x)\frac{2}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=-(\frac{n\pi}{\ell})^2\int_0^{\ell}u(t,x)\cdot\frac{2}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2u_n(t),$$

$$\int_0^{\ell}\varphi''(x)\frac{2}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2\varphi_n,\quad \int_0^{\ell}\psi(x)\frac{2}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=\psi_n,$$

$$\mathscr{F}_n(u;t)\equiv\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\mathscr{F}(u(t,x))\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx,$$

получаем:

$$\int_0^{\tau}\left\{u_n'(t)+\alpha\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2u_n(t)+(t-\tau)\mathscr{F}_n(u;t)\right\}dt-\alpha\tau\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2\varphi_n-\tau\cdot\psi_n=0.$$

Дифференцируя последнее тождество по τ два раза, получаем:

$$u_n'(\tau)+\alpha\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2u_n(\tau)-\int_0^{\tau}\mathscr{F}_n(u;t)dt-\alpha\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2\varphi_n-\psi_n=0,$$

$$u_n''(\tau)+\alpha\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2u_n'(\tau)-\mathscr{F}_n(u;\tau)=0.$$

Таким образом, для определения функций $u_n(\tau)$ получаем счётную систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка

$$u_n''(\tau)+\alpha\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2u_n'(\tau)=\mathscr{F}_n(u;\tau)$$

почти для всех $\tau\in[0,T]$, с начальными условиями $u_n(0)=\varphi_n$, $u_n'(0)=\psi_n$; а эта последняя задача Коши очевидно, что эквивалентна системе (1.21).

Совершенно аналогично лемме 1.1, легко доказывается следующая

Лемма 1.2. Если $u(t,x)$ является решением почти всюду (и тем более, классическим решением) задачи (1.1)-(1.3), то функции

$$u_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} u(t,x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx$$

удовлетворяют на [0,T] счётной системе (1.21).

5. В дальнейшем часто будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\mathscr{P}_0(u(t,x)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\ell}{\alpha n^2\pi^2}\int_0^t\int_0^{\ell} u(\tau,\xi)\left[1-\ell^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \qquad (1.24)$$

$$\mathscr{P}_1(u(t,x)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\ell^2}{\alpha n^3\pi^3}\int_0^t\int_0^{\ell} u(\tau,\xi)\left[1-\ell^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}\right]\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \qquad (1.25)$$

$$\mathscr{P}_2(u(t,x)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2\ell^3}{\alpha n^4\pi^4}\int_0^t\int_0^{\ell} u(\tau,\xi)\left[1-\ell^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x. \qquad (1.26)$$

§2. Исследование единственности решений задачи(1.1)-(1.3).

В этом параграфе устанавливаются теоремы единственности обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3).

Теорема 1.2. Пусть

1. Для каждого $u(t,x)\in B^{2,1}_{2,2,T}$ $\mathscr{F}(u(t,x))\in L_2(\mathscr{D}_T)$.

Для любых $u(t,x)$, $v(t,x) \in B^{2,1}_{2,2,T}$ и $\forall t \in [0,T]$:

$$\|\mathcal{F}(u(t,x)) - \mathcal{F}(v(t,x))\|_{L_2(0,\ell)} \le a_{1,u,v}(t)\|u-v\|_{B^0_{2,t}} +$$

$$+ a_{2,u,v}(t)\|u-v\|_{B^1_{2,t}} + a_{3,u,v}(t)\|u-v\|_{B^2_{2,t}} + a_{4,u,v}(t)\|u-v\|_{B^{2,0}_{2,2,t}} +$$

$$+ a_{5,u,v}(t)\|u-v\|_{B^{2,1}_{2,2,t}}, \tag{1.27}$$

де для каждого $t_0 \in [0,T)$ существует такое $\delta(t_0)$ $0 < \delta(t_0) \le T - t_0)$, что

$$(t-t_0)^{\frac{3}{2}} a_{1,u,v}(t), \quad (t-t_0) a_{2,u,v}(t), \quad (t-t_0)^{\frac{1}{2}} a_{3,u,v}(t),$$

$$(t-t_0)^{\frac{1}{2}} a_{4,u,v}(t), \quad a_{5,u,v}(t) \in L_2(t_0, t_0 + \delta(t_0)).$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) не может иметь более одного обобщённого решения.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть задача 1.1)-(1.3) имеет по крайней мере два различных обобщённых ешения

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{n\pi}{\ell}x \quad \text{и} \quad v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(t) \sin\frac{n\pi}{\ell}x.$$

По определению обобщённого решения задачи (1.1)-(1.3) $(t,x), v(t,x) \in B^{2,1}_{2,2,T}$. В силу леммы 1.1 каждая из последовательностей $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\vartheta_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет на $[0,T]$ системе (1.21). римем следующее обозначение:

$$t_0 \equiv \max\left\{t : t \in [0,T], \|u-v\|_{B^{2,1}_{2,2,t}} = 0\right\}.$$

о предположению $0 \le t_0 < T$, ибо в случае $t_0 = T$ получили бы $\|u-v\|_{B^{2,1}_{2,2,T}} = 0$, т.е. $u = v$, что противоречило бы предположению. о определению числа t_0 $\|u-v\|_{B^{2,1}_{2,2,t_0}} = 0$. Отсюда, в силу структуры пространства $B^{2,1}_{2,2,T}$, следует, что $\forall t \in [0,t_0]$ $\|u-v\|_{B^{2,1}_{2,2,t}} = 0$ и, следовательно, $\forall t \in [0,t_0]$:

$$\|u-v\|_{B^0_{2,t}} = \|u-v\|_{B^1_{2,t}} = \|u-v\|_{B^2_{2,t}} = \|u-v\|_{B^{2,0}_{2,2,t}} = \|u-v\|_{B^{2,1}_{2,2,t}} = 0.$$

Тогда из (1.27) видно,что $\forall t \in [0, t_0]$ $\|\mathscr{F}(u(t,x)) - \mathscr{F}(v(t,x))\|_{L_2(0,\ell)} = 0$, т.е. при любом фиксированном $t \in [0, t_0]$ для почти всех $x \in [0, \ell]$ $\mathscr{F}(u(t,x)) = \mathscr{F}(v(t,x))$. Учитывая это, из системы (1.21) получаем, что $\forall n \left(n = \overline{1,\infty}\right)$ и $\forall t \in [t_0, T]$:

$$|u_n(t) - \vartheta_n(t)|^2 \le \frac{4\ell^2}{\alpha^2 n^4 \pi^4} \int_{t_0}^{t} \left\{ \int_0^{\ell} [\mathscr{F}(u(\tau,\xi)) - \mathscr{F}(v(\tau,\xi))] \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi \right\}^2 d\tau \cdot$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2}(t-\tau) \right] \right\}^2 d\tau \le \frac{4\ell^2}{\alpha^2 n^4 \pi^4} \int_{t_0}^{t} \left\{ \int_0^{\ell} [\mathscr{F}(u(\tau,\xi)) - \right.$$

$$\left. - \mathscr{F}(v(\tau,\xi))] \cdot \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi \right\}^2 d\tau \cdot \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \right)^2 (t-\tau)^2 d\tau =$$

$$= \frac{4(t-t_0)^3}{3\ell^2} \int_{t_0}^{t} \left\{ \int_0^{\ell} [\mathscr{F}(u(\tau,\xi)) - \mathscr{F}(v(\tau,\xi))] \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi \right\}^2 d\tau, \quad (1.28)$$

$$\left(n \cdot |u_n(t) - \vartheta_n(t)|\right)^2 \le \frac{4\ell^2}{\alpha^2 n^2 \pi^4} \int_{t_0}^{t} \left\{ \int_0^{\ell} [\mathscr{F}(u(\tau,\xi)) - \mathscr{F}(v(\tau,\xi))] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi \right\}^2 d\tau \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2}(t-\tau) \cdot 1 d\tau = \frac{2(t-t_0)^2}{\alpha \pi^2} \cdot$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t} \left\{ \int_0^{\ell} [\mathscr{F}(u(\tau,\xi)) - \mathscr{F}(v(\tau,\xi))] \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi \right\}^2 d\tau, (1.29)$$

$$\left(n^2 \cdot |u_n(t) - \vartheta_n(t)|\right)^2 \le \frac{4\ell^2}{\alpha^2 \pi^4} \int_{t_0}^{t} \left\{ \int_0^{\ell} [\mathscr{F}(u(\tau,\xi)) - \mathscr{F}(v(\tau,\xi))] \cdot \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi \right\}^2 d\tau \cdot$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t} 1 d\tau = \frac{4\ell^2 (t-t_0)}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \int_{t_0}^{t} \left\{ \int_0^{\ell} [\mathscr{F}(u(\tau,\xi)) - \mathscr{F}(v(\tau,\xi))] \cdot \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi \right\}^2 d\tau, (1.30)$$

$$\left|u_n'(t)-\vartheta_n'(t)\right|^2 \le \frac{4}{\ell^2}\int_{t_0}^{t}\left\{\int_0^{\ell}[\mathscr{F}(u(\tau,\xi))-\mathscr{F}(v(\tau,\xi))]\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right\}^2 d\tau\cdot$$

$$\cdot\int_{t_0}^{t}\exp\left[-\frac{2\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]d\tau \le \frac{4(t-t_0)}{\ell^2}\int_{t_0}^{t}\left\{\int_0^{\ell}[\mathscr{F}(u(\tau,\xi))-\right.$$

$$\left.-\mathscr{F}(v(\tau,\xi))]\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right\}^2 d\tau, \qquad (1.31)$$

$$\left(n\cdot\left|u_n'(t)-\vartheta_n'(t)\right|\right)^2 \le \frac{2}{\alpha\pi^2}\int_{t_0}^{t}\left\{\int_0^{\ell}[\mathscr{F}(u(\tau,\xi))-\mathscr{F}(v(\tau,\xi))]\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right\}^2 d\tau. \qquad (1.32)$$

По определению числа t_0 для любых $n\ (n=1,2,\cdots)$ и $t\in[t_0,T]$ $u_n(t)=\vartheta_n(t)$ и $u_n'(t)=\vartheta_n'(t)$. Учитывая это, из неравенства (1.28) получаем, что $\forall t\in[t_0,T]$:

$$\|u-v\|^2_{B^0_{2,t}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)-\vartheta_n(\tau)|\right)^2 \le \frac{4(t-t_0)^3}{3\ell^2}\cdot\int_{t_0}^{t}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^{\ell}[\mathscr{F}(u(\tau,\xi))-\right.$$

$$\left.-\mathscr{F}(v(\tau,\xi))]\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right\}^2 d\tau = \frac{4}{3\ell^2}\cdot\frac{\ell}{2}(t-t_0)^3\int_{t_0}^{t}\int_0^{\ell}[\mathscr{F}(u(\tau,\xi))-$$

$$-\mathscr{F}(v(\tau,\xi))]^2 d\xi d\tau = \frac{2(t-t_0)^3}{3\ell}\int_{t_0}^{t}\|\mathscr{F}(u(\tau,\xi))-\mathscr{F}(v(\tau,\xi))\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau \le$$

$$\le \frac{2(t-t_0)^3}{3\ell}\|\mathscr{F}(u(\tau,\xi))-\mathscr{F}(v(\tau,\xi))\|^2_{L_2(D_T)}. \qquad (1.33)$$

Аналогично, из неравенств (1.29)-(1.32) соответственно получаем, что $\forall t\in[t_0,T]$:

$$\|u-v\|^2_{B^1_{2,t}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|u_n(\tau)-\vartheta_n(\tau)\right|\right)^2 \le \frac{\ell(t-t_0)^2}{2\alpha\pi^2}\cdot\int_{t_0}^{t}\|\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-$$

$$-\mathcal{F}(v(\tau,\xi))\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau \le \frac{\ell(t-t_0)^2}{2\alpha\pi^2}\cdot\|\mathcal{F}(u)-\mathcal{F}(v)\|^2_{L_2(\mathcal{D}_T)}. \qquad (1.34)$$

$$\|u-v\|^2_{B^2_{2,t}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|u_n(\tau)-\vartheta_n(\tau)\right|\right)^2 \le \frac{2\ell^3(t-t_0)}{\alpha^2\pi^4}\int_{t_0}^{t}\|\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-$$

$$-\mathcal{F}(v(\tau,\xi))\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau \le \frac{\ell^3(t-t_0)}{\alpha^2\pi^4}\|\mathcal{F}(u)-\mathcal{F}(v)\|^2_{L_2(\mathrm{D}_T)}, \qquad (1.35)$$

$$\|u_t-v_t\|^2_{B^0_{2,t}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\max_{0\le\tau\le t}\left|u_n'(\tau)-\vartheta_n'(\tau)\right|\right)^2 \le \frac{2(t-t_0)}{\ell}\int_{t_0}^{t}\|\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-$$

$$-\mathcal{F}(v(\tau,\xi))\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau \le \frac{2(t-t_0)}{\ell}\|\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-\mathcal{F}(v(\tau,\xi))\|^2_{L_2(\mathrm{D}_T)}, \qquad (1.36)$$

$$\|u_t-v_t\|^2_{B^1_{2,t}} = \sum_{n=1}^{\infty}(n\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|u_n'(\tau)-\vartheta_n'(\tau)\right|)^2 \le \frac{\ell}{\alpha\pi^2}\int_{t_0}^{t}\|\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-$$

$$-\mathcal{F}(v(\tau,\xi))\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau \le \frac{\ell}{\alpha\pi^2}\|\mathcal{F}(u)-\mathcal{F}(v)\|^2_{L_2(\mathrm{D}_T)}. \qquad (1.37)$$

Из неравенств (1.35)-(1.37) $\forall t\in[0,T]$ имеем:

$$\|u-v\|^2_{B^{2,0}_{2,2,t}} = (\|u-v\|_{B^2_{2,t}} + \|u_t-v_t\|_{B^0_{2,t}})^2 \le 2\Big(\|u-v\|^2_{B^2_{2,t}} +$$

$$+\|u_t-v_t\|^2_{B^0_{2,t}}\Big) \le 2\left[\frac{2\ell^3(t-t_0)}{\alpha^2\pi^4}\int_{t_0}^{t}\|\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-\mathcal{F}(v(\tau,\xi))\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau +\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\ell}(t-t_0)\int_{t_0}^{t}\|\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-\mathcal{F}(v(\tau,\xi))\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau\right] =$$

$$= \frac{4(\ell^4 + \alpha^2\pi^4)}{\alpha^2\pi^4\ell}(t-t_0)\int_{t_0}^{t}\|\mathscr{F}(u(\tau,\xi)) - \mathscr{F}(v(\tau,\xi))\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau \le$$

$$\le \frac{4(\ell^4 + \alpha^2\pi^4)}{\alpha^2\pi^4\ell}(t-t_0)\|\mathscr{F}(u) - \mathscr{F}(v)\|^2_{L_2(\mathscr{D}_T)}, \tag{1.38}$$

$$\|u-v\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}} = (\|u-v\|_{B^2_{2,t}} + \|u_t - v_t\|_{B^1_{2,t}})^2 \le 2(\|u-v\|^2_{B^2_{2,t}} + \|u_t - v_t\|^2_{B^1_{2,t}}) \le$$

$$\le 2\left[\frac{2\ell^3(t-t_0)}{\alpha^2\pi^4} + \frac{\ell}{\alpha\pi^2}\right]\cdot\int_{t_0}^{t}\|\mathscr{F}(u(\tau,\xi)) - \mathscr{F}(v(\tau,\xi))\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau =$$

$$= \frac{2\ell\left[2\ell^2(t-t_0) + \alpha\pi^2\right]}{\alpha^2\pi^4}\int_{t_0}^{t}\|\mathscr{F}(u(\tau,\xi)) - \mathscr{F}(v(\tau,\xi))\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau \le$$

$$\le \frac{2\ell(2\ell^2 T + \alpha\pi^2)}{\alpha^2\pi^4}\int_{t_0}^{t}\|\mathscr{F}(u(\tau,\xi)) - \mathscr{F}(v(\tau,\xi))\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau \le$$

$$\le \frac{2\ell(2\ell^2 T + \alpha\pi^2)}{\alpha^2\pi^4}\|\mathscr{F}(u) - \mathscr{F}(v)\|^2_{L_2(D_T)}. \tag{1.39}$$

Для любого $\delta\ (0 < \delta \le \delta(t_0))$ примем обозначения:

$$\sup_{t\in(t_0,t_0+\delta)}\left\{(t-t_0)^{-3}\cdot\|u-v\|^2_{B^0_{2,t}}\right\} \equiv A_{1,\delta} < +\infty, \tag{1.40}$$

$$\sup_{t\in(t_0,t_0+\delta)}\left\{(t-t_0)^{-2}\cdot\|u-v\|^2_{B^1_{2,t}}\right\} \equiv A_{2,\delta} < +\infty, \tag{1.41}$$

$$\sup_{t\in(t_0,t_0+\delta)}\left\{(t-t_0)^{-1}\cdot\|u-v\|^2_{B^2_{2,t}}\right\} \equiv A_{3,\delta} < +\infty, \tag{1.42}$$

$$\sup_{t\in(t_0,t_0+\delta)}\left\{(t-t_0)^{-1}\cdot\|u-v\|^2_{B^{2,0}_{2,2,t}}\right\} = A_{4,\delta} < +\infty, \tag{1.43}$$

$$\sup_{t\in(t_0,t_0+\delta)}\left\{\|u-v\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}}\right\} \equiv A_{5,\delta} < +\infty. \tag{1.44}$$

Пользуясь обозначениями (1.40)-(1.44) и неравенством (1.27), из оценки (1.33) получаем, что при любом $\delta\ (0 < \delta \le \delta(t_0))$ $\forall t \in (t_0, t_0 + \delta)$:

$$(t-t_0)^{-3}\|u-v\|^2_{B^0_{2,t}} \le \frac{2}{3\ell}\int_{t_0}^{t}\|\mathscr{F}(u(\tau,x))-\mathscr{F}(v(\tau,x))\|^2_{L_2(o,\ell)}d\tau \le$$

$$\le \frac{10}{3\ell}\int_{t_0}^{t}\Big[a^2_{1,u,v}(\tau)\|u-v\|^2_{B^0_{2,t}} + a^2_{2,u,v}(\tau)\|u-v\|^2_{B^1_{2,t}} + a^2_{3,u,v}(\tau)\|u-v\|^2_{B^2_{2,t}} +$$

$$+ a^2_{4,u,v}(\tau)\|u-v\|^2_{B^{2,0}_{2,2,t}} + a^2_{5,u,v}(\tau)\|u-v\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}}\Big]d\tau =$$

$$= \frac{10}{3\ell}\int_{t_0}^{t}\Big\{(\tau-t_0)^3 a^2_{1,u,v}(\tau)\cdot\Big[(\tau-t_0)^{-3}\cdot\|u-v\|^2_{B^0_{2,t}}\Big]+$$

$$+(\tau-t_0)^2 a^2_{2,u,v}(\tau)\Big[(\tau-t_0)^{-2}\cdot\|u-v\|^2_{B^1_{2,t}}\Big]+(\tau-t_0)^2\cdot a^2_{3,u,v}(\tau)\cdot$$

$$\cdot\Big[(\tau-t_0)^{-1}\cdot\|u-v\|^2_{B^2_{2,t}}\Big]+(\tau-t_0)\cdot a^2_{4,u,v}(\tau)\Big[(\tau-t_0)^{-1}\cdot\|u-v\|^2_{B^{2,0}_{2,2,t}}\Big]+$$

$$+a^2_{5,u,v}(\tau)\cdot\|u-v\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}}\Big\}d\tau \le \frac{10}{3\ell}\int_{t_0}^{t}\Big[\mathrm{A}_{1,\delta}\cdot(\tau-t_0)^3 a^2_{1,u,v}(\tau)+$$

$$+\mathrm{A}_{2,\delta}\cdot(\tau-t_0)^2 a^2_{2,u,v}(\tau)+\mathrm{A}_{3,\delta}\cdot(\tau-t_0)a^2_{3,u,v}(\tau)+$$

$$+\mathrm{A}_{4,\delta}\cdot(\tau-t_0)a^2_{4,u,v}(\tau)+\mathrm{A}_{5,\delta}\cdot a^2_{5,u,v}(\tau)\Big]d\tau \le \frac{10}{3\ell}\left(\mathrm{A}_{1,\delta}+\cdots+\mathrm{A}_{5,\delta}\right)\cdot$$

$$\cdot\int_{t_0}^{t}\Big[(\tau-t_0)^3 a^2_{1,u,v}(\tau)+(\tau-t_0)^2 a^2_{2,u,v}(\tau)+(\tau-t_0)a^2_{3,u,v}(\tau)+$$

$$+(\tau-t_0)a^2_{4,u,v}(\tau)+a^2_{5,u,v}(\tau)\Big]d\tau. \tag{1.45}$$

Если обозначить $\mathscr{A}(\delta)=\mathscr{A}_{1,\delta}+\cdots+\mathscr{A}_{5,\delta}$ и

$$\mathrm{H}(\delta)=\int_{t_0}^{t_0+\delta}\Big[(\tau-t_0)^3\cdot a^2_{1,u,v}(\tau)+(\tau-t_0)^2\cdot a^2_{2,u,v}(\tau)+$$

$$+(\tau-t_0)\cdot a^2_{3,u,v}(\tau)+(\tau-t_0)\cdot a^2_{4,u,v}(\tau)+a^2_{5,u,v}(\tau)\Big]d\tau,$$

то получим, что при любом $\delta(0<\delta\le\delta(t_0))\quad \forall t\in(t_0,t_0+\delta)$:

$$(t-t_0)^{-3}\cdot\|u-v\|^2_{B^0_{2,t}} \le \frac{10}{3\ell}\mathscr{A}(\delta)\mathrm{H}(\delta). \tag{1.46}$$

Так как в неравенстве (1.46) правая часть от t не зависит, то левая часть в интервале $(t_0, t_0+\delta)$ ограничена. Тогда, пользуясь обозначением (1.40), из (1.46) получаем:

$$\mathrm{A}_{1,\delta} \le \frac{10}{3\ell} \mathscr{A}(\delta)\cdot \mathrm{H}(\delta). \tag{1.47}$$

Аналогично, из оценок (1.34), (1.35), (1.38) и (1.39) получаем, что $\forall \delta \quad (0<\delta \le \delta(t_0))$:

$$\mathscr{A}_{2,\delta} \le \frac{5\ell}{2\alpha\pi^2}\cdot \mathscr{A}(\delta)\mathrm{H}(\delta), \quad \mathscr{A}_{3,\delta} \le \frac{10}{3\ell}\cdot \mathscr{A}(\delta)\mathrm{H}(\delta), \tag{1.48}$$

$$\mathscr{A}_{4,\delta} \le \frac{20(\ell^4+\alpha^2\pi^4)}{\alpha^2\pi^4\ell} \mathscr{A}(\delta)\mathrm{H}(\delta), \quad \mathscr{A}_{5,\delta} \le \frac{10\ell^3}{\alpha^2\pi^4} \mathscr{A}(\delta)\mathrm{H}(\delta) . \tag{1.49}$$

Складывая неравенства (1.47)-(1.49), получаем:

$$\mathscr{A}(\delta) \le \frac{5(28\alpha^2\pi^4+15\alpha\pi^2\ell^2+60\ell^4)}{6\alpha^2\pi^4\ell}\cdot \mathscr{A}(\delta)\cdot \mathrm{H}(\delta). \tag{1.50}$$

Если число $\delta=\delta^*(0<\delta^* \le \delta(t_0) \le T-t_0)$ выбрать и фиксировать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{5(28\alpha^2\pi^4+15\alpha\pi^2\ell^2+60\ell^4)}{6\alpha^2\pi^4\ell}\mathrm{H}(\delta^*)<1$$

(это возможно по теореме Лебега об абсолютной непрерывности интеграла Лебега), то из неравенства (1.50) получим:

$$\mathscr{A}(\delta^*)=\mathscr{A}_{1,\delta^*}+\cdots+\mathscr{A}_{5,\delta^*}=0.$$

Следовательно,

$$\mathscr{A}_{1,\delta^*}=\cdots=\mathscr{A}_{5,\delta^*}=0.$$

В частности из $\mathscr{A}_{5,\delta^*}=0$ следует, что

$$\|u-v\|_{B^{2,1}_{2,2,t_0+\delta^*}}=0.$$

А это, в силу положительности числа δ^*, противоречит определению числа t_0. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из доказанной теоремы вытекает следующее

Следствие I.I. Пусть оператор $\mathscr{F}$ порождён функцией вида $F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})$, т.е.

$$\mathcal{F}(u(t,x)) = F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x)) \, ,$$

причём:

1. Функция $F(t,x,u_1,\cdots,u_5)$ определена в области $\mathcal{D}_T \times (-\infty,\infty)^5$ и в этой же области удовлетворяет условиям Каратеодори, т.е. измерима по (t,x) в $\mathcal{D}_T = [0,T]\times[0,\ell]$ для всех фиксированных $u_1,\cdots,u_5 \in (-\infty,\infty)$ и непрерывна по $(u_1,u_2,\cdots,u_5)$ в $(-\infty,\infty)^5$ для почти всех $(t,x)\in \mathcal{D}_T$.

2. Для каждого $R>0$ в области $\mathcal{D}_T \times [-R,R]^3 \times (-\infty,\infty)^2$:

$$\left|F(t,x,u_1,\cdots,u_5) - F(t,x,v_1,\cdots,v_5)\right| \le \sum_{i=1}^{5} b_{i,R}(t)\left|u_i - v_i\right|,$$

где для каждого $t_0 \in [0,T)$ существует такое число $\delta_R(t_0)(0 <$ $< \delta_R(t_0) \le T - t_0)$, что

$$(t-t_0)^{1/2}\cdot b_{1,R}(t),(t-t_0)^{1/2}\cdot b_{2,R}(t),(t-t_0)b_{3,R}(t),$$

$$b_{4,R}(t),(t-t_0)^{1/2} b_{5,R}(t) \in L_2(t_0,t_0+\delta_R(t_0)). \qquad (1.51)$$

3. Для каждого $R>0$ в области $\mathcal{D}_T \times [-R,R]^3 \times (-\infty,\infty)^2$

$$\left|F(t,x,u_1,\cdots,u_5)\right| \le a_R(t,x) + b_R(t)\left(|u_4| + |u_5|\right),$$

где

$$a_R(t,x)\in L_2(\mathcal{D}_T), \quad b_R(t)\in L_2(0,T).$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) не может иметь более одного обобщённого решения.

Для доказательства следствия достаточно проверить выполнение всех условий теоремы 1.2. На самом деле $\forall u(t,x)\in B^{2,1}_{2,2,T}$:

1. $$\left\|\mathcal{F}(u(t,x))\right\|^2_{L_2(D_T)} = \int_0^T\int_0^\ell F^2(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),$$

$$u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))dxdt \le \int_0^T\int_0^\ell \left[a_R(t,x) + b_R(t)(\left|u_{tx}(t,x)\right| +\right.$$

$$+|u_{xx}(t,x)|)]^2\,dxdt \le 3\int_0^T\int_0^\ell a_R^2(t,x)dxdt + 3\int_0^T\int_0^\ell b_R^2(t)(u_{tx}^2(t,x)+$$

$$+u_{xx}^2(t,x))dxdt \le 3\,\|a_R(t,x)\|^2_{L_2(D_T)} + 3\int_0^T b_R^2(t)\left[\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\pi^2}{\ell^2}\sum_{n=1}^{\infty}(nu_n'(t))^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\pi^4}{\ell^4}\sum_{n=1}^{\infty}(n^2u_n(t))^2\right]dt \le 3\,\|a_R(t,x)\|^2_{L_2(D_T)} + 3\int_0^T b_R^2(t)\left[\frac{\pi^2}{2\ell}\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,T}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi^4}{2\ell^3}\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,T}}\right]dt = 3\|a_R(t,x)\|^2_{L_2(D_T)} + \frac{3\pi^2(\pi^2+\ell^2)}{2\ell^3}\|b_R(t)\|^2_{L_2(o,T)}\cdot\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,T}} < \infty,$$

где

$$\max\left\{\|u(t,x)\|_{C(\mathscr{D}_T)}, \|u_t(t,x)\|_{C(\mathscr{D}_T)}, \|u_x(t,x)\|_{C(\mathscr{D}_T)}\right\} < R < +\infty.$$

Следовательно, условие 1 теоремы 1.2 выполнено.

2. Очевидно, чтго $\forall\, u(t,x),\quad v(t,x)\in B^{2,1}_{2,2,T}$ и $t\in[0,T]$:

$$\|\mathscr{F}(u(t,x))-\mathscr{F}(v(t,x))\|_{L_2(0,\ell)} = \|F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),$$

$$u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))-F(t,x,v(t,x),v_t(t,x),v_x(t,x),v_{tx}(t,x),$$

$$v_{xx}(t,x))\|_{L_2(0,\ell)} \le b_{1,R}(t)\|u(t,x)-v(t,x)\|_{L_2(0,\ell)}+$$

$$+b_2(t)\|u_t(t,x)-v_t(t,x)\|_{L_2(o,\ell)}+b_{3,R}(t)\|u_x(t,x)-$$

$$-v_x(t,x)\|_{L_2(0,\ell)}+b_{4,R}(t)\|u_{tx}(t,x)-v_{tx}(t,x)\|_{L_2(0,\ell)}+$$

$$+b_{5,R}(t)\cdot\|u_{xx}(t,x)-v_{xx}(t,x)\|_{L_2(0,\ell)} \le \frac{\ell}{2}b_{1,R}(t)\|u-v\|_{B^0_{2,\ell}}+$$

$$+\frac{\ell}{2}b_{2,R}(t)\|u_t-v_t\|_{B^0_{2,\ell}}+\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\pi}{\ell}b_{3,R}(t)\|u-v\|_{B^1_{2,\ell}}+$$

$$+\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\pi}{\ell}b_{4,R}(t)\|u_t-v_t\|_{B^1_{2,\ell}}+\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\pi^2}{\ell^2}b_{5,R}(t)\|u-v\|_{B^2_{2,\ell}} \le$$

$$\leq a_{1,R}(t)\|u-v\|_{B^0_{2,t}} + a_{2,R}(t)\|u-v\|_{B^1_{2,t}} + a_{3,R}(t)\|u-v\|_{B^2_{2,t}} +$$

$$+ a_{4,R}(t)\|u-v\|_{B^{1,0}_{2,2,t}} + a_{5,R}(t)\|u-v\|_{B^{2,1}_{2,2,t}},$$

где

$$a_{1,R}(t) = \frac{\ell}{2} b_{1,R}(t),\ a_{2,R}(t) = \frac{\pi}{2} b_{3,R}(t),\ a_{3,R}(t) = \frac{\pi^2}{2\ell} b_{5,R}(t),$$

$$a_{4,R}(t) = \frac{\ell}{2} b_{2,R}(t), \quad a_{5,R}(t) = \frac{\pi}{2} b_{4,R}(t).$$

Следовательно, условие 2 теоремы 1.2 выполнено.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1.2. Тогда из утверждения теоремы 1.2 вытекает, что задача (1.1)-(1.3) не может иметь более одного обобщённого решения. Этим следствие доказано.

Совершенно аналогично теореме 1.2, легко доказывается следующая

Теорема 1.3. Пусть

1. $i = 1,2$.

2. $\forall u(t,x),\quad v(t,x) \in B^{2,1}_{2,2,T} \bigcap G_i$ и $t \in [0,T]$ выполнено условие (1.27), где классы G_i определены в пункте 3 §1, а функции $a_{j,u,v}(t)$ $(j = \overline{1,5})$ удовлетворяют тем же условиям, что и в условии 2 теоремы 1.2.

Тогда задача (1.1)-(1.3) не может иметь: более одного решения почти всюду при $i = 1$ и более одного классического решения при $i = 2$.

§3. Исследование существования решений задачи (1.1)-(1.3).

В этом параграфе, с помощью принципов М.А.Красносельского (см.[71], стр.1234) и ненулевого вращения (см. [72], стр.322), доказаны следующие теоремы существования обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3).

Теорема 1.4. Пусть

1. $i = 0,1,2$.

2. а) $\varphi(x) \in C^{(1+i)}[0,\ell]$, $\varphi^{(2+i)}(x) \in L_2(0,\ell)$ и $\varphi^{(2j)}(0) =$ $= \varphi^{(2j)}(l) = 0$, где j=0 при i=0; j=0,1 при i=1,2;

   б) $\psi(x) \in C^{(i)}[0,\ell]$, $\psi^{(1+i)}(x) \in L_2(0,\ell)$ и $\psi^{(2j)}(0) =$ $= \psi^{(2j)}(\ell) = 0$, где j=0 при i=0,1; j=0,1 при i=2.

3. $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2$, причём:

   а) оператор $\mathscr{F}_1$ действует из шара $\mathscr{K}_1^{(i)}\left(\|u\|_{B_{2,T}^{1+i}} \le R\right)$ в E_{x^i} непрерывно, где пространства $E_{x^i} (i = 0,1,2)$ определены в пункте 3 §1, $R > \|W(t,x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}$, а функция $W(t,x)$ определена соотношением

$$W(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n + \frac{\ell}{\alpha n^2\pi^2}(1 - e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t})\psi_n\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}x; \qquad (1.52)$$

   б) оператор $\mathscr{F}_2$ действует из шара $\mathscr{K}_2^{(i)}\left(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \le R\right)$ в E_x^i и в этом шаре удовлетворяет условию Липшица:

$$\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}_2(u(t,x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}_2(v(t,x))\right\|_{L_2(D_T)} \le q_i\|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}, \qquad (1.53)$$

где

$$\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^i \cdot \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} q_i \equiv q_{0,i} < 1.$$

4. $$\|W(t,x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^i \cdot \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \cdot$$

$$\cdot \sup_{u \in K_2^{(i)}} \cdot \left\{\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}(u(t,x))\right\|_{L_2(D_T)}\right\} \le R. \qquad (1.54)$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) имеет: при $i = 0$ обобщённое решение, при $i = 1$ решение почти всюду, а при $i = 2$ клас-сическое решение.

Доказательство. Из условия 2 данной теоремы следует, что $W(t,x)\in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$, ибо $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{2+i}\varphi_n)^2<+\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1+i}\psi_n)^2<+\infty$. В шаре $\mathcal{K}_2^{(i)}\left(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}\le R\right)$ рассмотрим операторы $Q_{1,i}$ и $Q_{2,i}$, определённые следующим образом:

$$Q_{1,i}(u)=W+\mathcal{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}_1(u)\right),\quad Q_{2,i}(u)=\mathcal{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}_2(u)\right),\tag{1.55}$$

где операторы $\mathcal{P}_i(u)$ $(i=0,1,2)$ определены соотношениями (1.24)-(1.26). Для любых $u,v\in\mathcal{K}_2^{(i)}$ будем оценивать следующие нормы:

$$\left\|Q_{1,i}(u)+Q_{2,i}(u)\right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}},\quad \left\|Q_{1,i}(u)-Q_{1,i}(v)\right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}\ \text{и}$$

$$\left\|Q_{2,i}(u)-Q_{2,i}(v)\right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}.$$

Очевидно, что

$$\left\|Q_{1,i}(u)+Q_{2,i}(u)\right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}=\Big\|W(t,x)+$$

$$+\mathcal{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}_1(u(t,x))\right)+\mathcal{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}_2(u(t,x))\right)\Big\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}\le$$

$$\le\|W(t,x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}+\left\|\mathcal{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}_1(u(t,x))\right)+\mathcal{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}_2(u(t,x))\right)\right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}=$$

$$=\|W(t,x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}+\left\|\mathcal{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}(u(t,x))\right)\right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}.\tag{1.56}$$

Теперь оценим второе слагаемое в правой части неравенства (1.56). Для любых n $(n=\overline{1,\infty})$, $t\in[0,T]$ и $u\in\mathcal{K}_2^{(i)}$ имеем:

$$\left\{n^2\cdot\frac{2\ell}{\alpha n^2\pi^2}\int_0^t\int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau,\xi))\left[1-\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right)\right]\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\right\}^2\le$$

$$\le\frac{4\ell^2}{\alpha^2\pi^4}\int_0^t\left[\int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\cdot\int_0^t[1-e^{-\frac{\alpha n\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}]^2 d\tau\le t\cdot\frac{4\ell^2}{\alpha^2\pi^4}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\left[\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\le\frac{4\ell^2 T}{\alpha^2\pi^4}\int_0^T\left[\int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau,$$

$$\left\{n^3\cdot\frac{2\ell^2}{\alpha n^3\pi^3}\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot[1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}]\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\right\}^2\le$$

$$\le\frac{4\ell^4}{\alpha^2\pi^6}\int_0^t\left[\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\cdot\int_0^t[1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}]^2 d\tau\le$$

$$\le t\cdot\frac{4\ell^4}{\alpha^2\pi^6}\int_0^t\left[\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\le$$

$$\le\frac{4\ell^4 T}{\alpha^2\pi^6}\int_0^T\left[\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau,$$

$$\left\{n^4\cdot\frac{2\ell^3}{\alpha n^4\pi^4}\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot[1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}]\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\right\}^2\le$$

$$\le\frac{4\ell^6}{\alpha^2\pi^8}\int_0^t\left[\int_0^\ell\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\cdot\int_0^t[1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}]^2 d\tau\le$$

$$\le t\cdot\frac{4\ell^6}{\alpha^2\pi^8}\int_0^t\left[\int_0^\ell\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\le$$

$$\le\frac{4\ell^6 T}{\alpha^2\pi^8}\int_0^T\left[\int_0^\ell\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau;$$

$$\left\{n\cdot\frac{2}{\ell}\int_0^t\left[\int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\right\}^2\le$$

$$\le\frac{4}{\ell^2}\cdot n^2\int_0^t\left[\int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\cdot\int_0^t\exp\left[-\frac{2\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]d\tau=$$

$$=\frac{4}{\ell^2}\cdot n^2\int_0^t\left[\int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\cdot\frac{\ell^2}{2\alpha n^2\pi^2}\cdot$$

$$\cdot\left[1-\exp\left(-\frac{2\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t\right)\right]\le\frac{2}{\alpha\pi^2}\int_0^t\left[\int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\le$$

$$\le\frac{\ell}{\alpha\pi^2}\int_0^T\left[\int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau,$$

$$\left\{n^2\cdot\frac{2}{\pi n}\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\right\}^2\le$$

$$\le\frac{4n^2}{\pi^2}\int_0^t\left[\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\cdot\int_0^t\exp\left[-\frac{2\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]d\tau=$$

$$=\frac{4n^2}{\pi^2}\int_0^t\left[\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\cdot\frac{\ell^2}{2\alpha n^2\pi^2}\left[1-\exp\left(-\frac{2\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t\right)\right]\le$$

$$\le\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^4}\int_0^t\left[\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{F}u(\tau,\xi))\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\le\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^4}\int_0^T\left[\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau,$$

$$\left\{n^3\frac{2\ell}{n^2\pi^2}\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\cdot\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\right\}^2\le$$

$$\le\frac{4n^2\ell^2}{\pi^4}\int_0^t\left[\int_0^\ell\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\cdot$$

$$\cdot\int_0^t \exp\left[-\frac{2\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]d\tau = \frac{4n^2\ell^2}{\pi^4}\int_0^t\left[\int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\cdot$$

$$\cdot\frac{\ell^2}{2\alpha n^2\pi^2}\left[1-\exp\left(-\frac{2\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t\right)\right]\le\frac{2\ell^4}{\alpha\pi^6}\int_0^t\left[\int_0^\ell\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau\le$$

$$\le\frac{2\ell^4}{\alpha\pi^6}\int_0^T\left[\int_0^\ell\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau.$$

Из этих оценок следует, что..

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^2\cdot\max_{0\le t\le T}\left|\frac{2\ell}{\alpha n^2\pi^2}\int_0^t\int_0^\ell\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\left[1-\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right)\right]\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\right|\right\}^2\le T\cdot\frac{4\ell^2}{\alpha^2\pi^4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left[\int_0^\ell\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau=$$

$$=\frac{4\ell^2T}{\alpha^2\pi^4}\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^\ell\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau=$$

$$=\frac{4\ell^2T}{\alpha^2\pi^4}\cdot\frac{\ell}{2}\int_0^T\int_0^\ell\left\{\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\right\}^2 d\xi d\tau=\frac{2T\ell^3}{\alpha^2\pi^4}\|\mathscr{F}(u)\|^2_{L_2(D_T)},\tag{1.57}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^3\cdot\max_{0\le t\le T}\left|\frac{2\ell^2}{\alpha n^3\pi^3}\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot\left[1-\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right)\right]\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\right|\right\}^2\le T\cdot\frac{4\ell^4}{\alpha^2\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left[\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau=$$

$$=\frac{4\ell^4T}{\alpha^2\pi^6}\int_0^T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2\right\}d\tau\le$$

$$\le\frac{4\ell^4T}{\alpha^2\pi^6}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\int_0^T\int_0^\ell\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\right\}^2 d\xi d\tau=\frac{2\ell^5T}{\alpha^2\pi^6}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\mathscr{F}(u(t,x))\right\|^2_{L_2(D_T)},\tag{1.58}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^4\cdot\max_{0\le t\le T}\left|\frac{2\ell^4}{\alpha n^4\pi^4}\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot\left[1-\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right)\right]\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\right|\right\}^2\le T\cdot\frac{4\ell^6}{\alpha^2\pi^8}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left[\int_0^\ell\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2 d\tau=$$

$$=\frac{4\ell^6T}{\alpha^2\pi^8}\int_0^T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^\ell\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2\right\}d\tau\le$$

$$\le\frac{4\ell^6T}{\alpha^2\pi^8}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\int_0^T\int_0^\ell\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\right\}^2 d\xi d\tau=\frac{2\ell^7T}{\alpha^2\pi^8}\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{F}(u(t,x))\right\|^2_{L_2(\mathscr{D}_T)};\quad(1.59)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\cdot\max_{0\le t\le T}\left|\frac{2}{\ell}\int_0^t\int_0^\ell\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\right|\right\}^2\le$$

$$\le\frac{\ell}{\alpha\pi^2}\|\mathscr{F}(u)\|^2_{L_2(\mathscr{D}_T)},\qquad(1.60)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^2\cdot\max_{0\le t\le T}\left|\frac{2}{n\pi}\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\right|\right\}^2\le\frac{\ell^3}{\alpha\cdot\pi^4}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\mathscr{F}(u(t,x))\right\|^2_{L_2(D_T)},\qquad(1.61)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^3\cdot\max_{0\le t\le T}\left|\frac{2\ell}{n^2\pi^2}\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\right|\right\}^2\le\frac{\ell^5}{\alpha\pi^6}\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{F}(u(t,x))\right\|^2_{L_2(\mathscr{D}_T)}.\qquad(1.62)$$

Следовательно,

$$\left\| \mathscr{P}_i \left(\frac{\partial_i}{\partial x_i} \mathscr{F}(u(t,x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u(t,x)) \right\|_{L_2(\mathscr{D}_T)}. \quad (1.63)$$

Таким образом, для любых $u, v \in \mathscr{K}_2^{(i)}$ имеем:

$$\left\| Q_{1,i}(u) + Q_{2,i}(u) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} = \left\| W + \mathscr{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u(t,x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq$$

$$\leq \|W\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} + \left\| \mathscr{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u(t,x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \left\| W \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} +$$

$$+ \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \cdot \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u(t,x)) \right\|_{L_2(D_T)} \leq \left\| W \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} +$$

$$+ \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \cdot \sup_{u \in K_2^{(i)}} \left\{ \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u(t,x)) \right\|_{l_2(D_T)} \right\} \leq R, \quad (1.64)$$

$$\left\| Q_{1,i}(u) - Q_{1,i}(v) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} = \left\| \mathscr{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}_1(u(t,x)) \right) - \mathscr{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}_1(V(t,x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} =$$

$$= \left\| \mathscr{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}_1(u(t,x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}_1(v(t,x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}_1(u(t,x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}_1(v(t,x)) \right\|_{L_2(D_T)}, \quad (1.65)$$

$$\left\| Q_{2,i}(u) - Q_{2,i}(v) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \cdot \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}_2(u(t,x)) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}_2(v(t,x)) \right\|_{L_2(D_T)} \leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \cdot q_i \|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} =$$

$$= q_{0,i} \|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}. \quad (1.66)$$

Так как $\mathcal{K}_2^{(i)}\left(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \le R\right) \subset \mathcal{K}_1^{(i)}\left(\|u\|_{B_{2,2,T}^{1+i}} \le R\right)$, то из (1.65), в силу условия 3а данной теоремы, следует, что операторы $Q_{1,i}$ переводят всякую последовательность, составленную из элементов $\mathcal{K}_2^{(i)}$ и сходящуюся по метрике пространства $B_{2,T}^{1+i}$, в последовательность, сходящуюся по метрике пространства $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$. В силу теоремы 1.1 шар $\mathcal{K}_2^{(i)}\left(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \le R\right)$ пространства $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ вкладывается в шар $\mathcal{K}_1^{(i)}\left(\|u\|_{B_{2,T}^{1+i}} \le R\right)$ пространства $B_{2,T}^{1+i}$ вполне непрерывно.

Следовательно, операторы $Q_{1,i}$ действуют из шара $\mathcal{K}_2^{(i)}$ пространства $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ вполне непрерывно. Далее, так как $\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^i \frac{\ell\sqrt{2\ell T+\pi\sqrt{\alpha\ell}}}{\alpha\pi^2} q_i = q_{0,i} < 1$, то из (1.66) видно, что операторы $Q_{2,i}$ удовлетворяют в шаре $\mathcal{K}_2^{(i)}$ условию Липшица с коэффициентом Липшица, меньшем единицы. А из (1.64) видно, что операторы $Q_{1,i} + Q_{2,i}$ преобразуют шар $\mathcal{K}_2^{(i)}$ в себя. Таким образом, в силу комбинированного принципа М.А.Красносельского, операторы $Q_{1,i} + Q_{2,i} = Q_i$ имеют в шаре $\mathcal{K}_2^{(i)}$ по крайней мере одну неподвижную точку $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{n\pi}{\ell}x$, которая, как покажем ниже, является: при $i=0$ обобщённым решением, при $i=1$ решением почти всюду, а при $i=2$ классическим решением задачи (1.1)-(1.3):

1. Пусть i=0. Тогда очевидно, что коэффициенты Фурье $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ функции $u(t,x)$ удовлетворяют системе (1.21). Тогда, очевидно, что

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin\frac{n\pi}{\ell}x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x = \varphi(x) \quad \forall x \in [0,\ell],$$

$$u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(0)\sin\frac{n\pi}{\ell}x=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x=\psi(x)\quad\forall x\in[0,\ell],$$

т.е. оба начальных условия (1.2) удовлетворяются в обычном классическом смысле. Далее, покажем, что для любых $v(t,x)$, фигурирующих в определении обобщённого решения задачи (1.1)-(1.3), удовлетворяются соответствующие интегральные тождества (1.18) и (1.19).

С этой целью для каждого натурального числа p примем обозначение: $u_p(t,x)=\sum_{n=1}^{p}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$, где $u_n(t)$ - коэффициенты Фурье вышенайденной неподвижной точки $u(t,x)$ оператора Q_t. Рассмотрим следующие выражения:

$$J_{1,p}=\int_0^T\int_0^{\ell}\{u_{p,t}(t,x)v_t(t,x)-\alpha u_{p,xx}(t,x)v_t(t,x)+$$

$$+\mathscr{F}(u(t,x))v(t,x)\}dxdt-\alpha\int_0^{\ell}\varphi''(x)v(0,x)dx+$$

$$+\int_0^{\ell}\psi(x)v(0,x)dx, \tag{1.67}$$

$$J_{2,p}=\int_0^T\int_0^{\ell}\{u_{p,t}(t,x)v_t(t,x)-\alpha u_{p,tx}(t,x)v_x(t,x)+$$

$$+\mathscr{F}(u(t,x))v(t,x)\}dxdt+\int_0^{\ell}\psi(x)v(0,x)dx, \tag{1.68}$$

Пользуясь системой (1.21), имеем:

$$\int_0^T\int_0^{\ell}u_{p,t}(t,x)v_t(t,x)dxdt=\int_0^T\int_0^{\ell}\sum_{n=1}^{p}u_n'(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cdot v_t(t,x)dxdt=$$

$$=\sum_{n=1}^{p}\int_0^{\ell}\left[\int_0^T u_n'(t)v_t(t,x)dt\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=\sum_{n=1}^{p}\int_0^{\ell}\Big\{\left[u_n'(t)v_t(t,x)\right]_{t=0}^{t=T}-$$

$$-\int_0^T u_n''(t)v(t,x)dt\Big\}\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=\sum_{n=1}^{p}\int_0^{\ell}\Big[-u_n'(0)v(0,x)-$$

$$-\int_0^T u_n''(t)v(t,x)dt\Big]\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=-\int_0^{\ell}\sum_{n=1}^{p}\psi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\ v(0,x)dx-$$

$$-\int_0^T\int_0^{\ell}\sum_{n=1}^{p}u_n''(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,v(t,x)dxdt,$$

$$\int_0^T\int_0^{\ell}u_{p\_xx}(t,x)v_t(t,x)dxdt=$$

$$=\sum_{n=1}^{p}\int_0^{\ell}\left[-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\int_0^T u_n(t)v_t(t,x)dt\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}dx=$$

$$=-\frac{\pi^2}{\ell^2}\sum_{n=1}^{p}n^2\int_0^{\ell}\left[u_n(t)v(t,x)\Big|_{t=0}^{t=T}-\int_0^T u_n'(t)v(t,x)dt\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}dx=$$

$$=-\frac{\pi^2}{\ell^2}\sum_{n=1}^{p}n^2\int_0^{\ell}\Big[-u_n(0)v(0,x)-\int_0^T u_n'(t)v(t,x)dt\Big]\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=$$

$$=\frac{\pi^2}{\ell^2}\int_0^{\ell}\sum_{n=1}^{p}n^2\varphi_n Sin\frac{n\pi}{\ell}x\ v(0,x)dx+$$

$$+\frac{\pi^2}{\ell^2}\int_0^T\int_0^{\ell}\sum_{n=1}^{p}n^2u_n'(t)Sin\frac{n\pi}{\ell}x\,v(t,x)dxdt.$$

Подставляя полученные выражения соответственно вместо первого и второго слагаемого в равенстве (1.67) и пользуясь системой (1.21), получаем:

$$J_{1,p}=\int_0^T\int_0^\ell\left\{\sum_{n=1}^p\left[-u_n''(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}u_n'(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]+\right.$$

$$\left.+\mathscr{F}(u(t,x))\right\}v(t,x)dxdt-\int_0^\ell\sum_{n=1}^p\psi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,v(0,x)dx-$$

$$-\frac{\alpha\pi^2}{\ell^2}\int_0^\ell\sum_{n=1}^p n^2\varphi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\;v(0,x)dx-\alpha\int_0^\ell\varphi''(x)v(0,x)dx+$$

$$+\int_0^\ell\psi(x)v(0,x)dx=\int_0^T\int_0^\ell\left\{\sum_{n=1}^p\left[-u_n''(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}u_n'(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]+\mathscr{F}(u(t,x))\right\}v(t,x)dxdt+$$

$$+\int_0^\ell\left[\psi(x)-\sum_{n=1}^p\psi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]\cdot v(0,x)dx-\alpha\int_0^\ell\left[\varphi''(x)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^p\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]v(0,x)dx=$$

$$=\int_0^T\int_0^\ell\left\{\sum_{n=1}^p\left[\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t\right)\psi_n+\frac{2\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\int_0^t\int_0^\ell\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot\right.\right.$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell}(t-\tau)\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t\right)\psi_n-$$

$$-\frac{2\alpha n^2\pi^2}{\ell^3}\int_0^t\int_0^\ell\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau-$$

$$\left.\left.-\frac{2}{\ell}\int_0^\ell\mathscr{F}(u(t,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}x+\mathscr{F}(u(t,x))\right\}v(t,x)dxdt+$$

$$+\int_0^\ell\left[\sum_{n=1}^\infty\psi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x-\sum_{n=1}^p\psi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]v(0,x)dx+\alpha\int_0^\ell\left[\sum_{n=1}^\infty\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\cdot\right.$$

$$\cdot \varphi_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x - \sum_{n=1}^{p}\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\varphi_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x \Bigg] v(0,x)dx = \int_0^T\int_0^\ell\Bigg[-\sum_{n=1}^{p}\frac{2}{\ell}\int_0^\ell \mathcal{F}(u(t,\xi)\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x+\mathcal{F}(u(t,x))\Bigg]v(t,x)dxdt+\int_0^\ell\sum_{n=p+1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cdot$$

$$\cdot v(0,x)dx+\alpha\cdot\int_0^\ell\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\; v(0,x)dx=$$

$$=\int_0^T\int_0^\ell\Bigg[\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{2}{\ell}\int_0^\ell\mathcal{F}(u(t,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Bigg]\cdot v(t,x)dx+$$

$$+\int_0^\ell\sum_{n=p+1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\; v(0,x)dx+\alpha\int_0^\ell\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cdot V(0,x)dx\cdot$$

В результате получили, что

$$J_{1,p}=\int_0^T\int_0^\ell\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{2}{\ell}\int_0^\ell\mathcal{F}(u(t,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cdot v(t,x)dxdt+$$

$$+\int_0^\ell\left(\sum_{n=p+1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)v(0,x)dx+\alpha\int_0^\ell\left(\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cdot v(0,x)dx$$

Очевидно, что

$$\left|J_{1,p}\right|\le\left\|\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{2}{\ell}\int_0^\ell\mathcal{F}(u(t,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\|_{L_2(D_T)}\cdot$$

$$\cdot\left\|v(t,x)\right\|_{L_2(D_T)}+\left\|\sum_{n=p+1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\|_{L_2(0,\ell)}\cdot\left\|v(0,x)\right\|_{L_2(0,\ell)}+$$

$$+\alpha\left\|\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\|_{L_2(0,\ell)}\cdot\left\|v(0,x)\right\|_{L_2(0,\ell)}\to 0 \text{ при } p\to\infty.$$

Следовательно, $\lim\limits_{p\to\infty} J_{1,p}=0$. Тогда, переходя к пределу при $p\to\infty$, из (1.67) получаем, что выполняется интегральное тождество (1.18).

Теперь рассмотрим следующее выражение:

$$J_{2,p}=\int_0^T\int_0^\ell \{u_{p,t}(t,x)v_t(t,x)dxdt-\alpha u_{p,tx}(t,x)v_x(t,x)+$$

$$+\mathscr{F}(u(t,x))\cdot v(t,x)\}dxdt+\int_0^\ell \psi(x)V(0,x)dx.$$

Как было показано выше

$$\int_0^T\int_0^\ell u_{p,t}(t,x)v_t(t,x)dxdt=\int_0^T\int_0^\ell \sum_{n=1}^p u_n'(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,v_t(t,x)dxdt=$$

$$=-\int_0^\ell \sum_{n=1}^p \psi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cdot v(0,x)dx-\int_0^T\int_0^\ell \sum_{n=1}^p u_n''(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cdot v(t,x)dxdt.$$

С другой стороны,

$$\alpha\int_0^T\int_0^\ell u_{p,tx}(t,x)v_x(t,x)dxdt==\frac{\alpha\pi}{\ell}\sum_{n=1}^p n\int_0^T [u_n'(t)\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}x\cdot$$

$$\cdot v_x(t,x)dx]dt=\frac{\alpha\pi}{\ell}\sum_{n=1}^p n\int_0^T u_n'(t)[v(t,x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\Big|_{x=0}^{x=\ell}+$$

$$+\frac{n\pi}{\ell}\int_0^\ell v(t,x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx]dt=\int_0^T\int_0^\ell \sum_{n=1}^p \frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}u_n'(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cdot$$

$$\cdot v(t,x)dxdt.$$

Пользуясь последними двумя соотношениями и системой (1.21), получаем:

$$J_{2,p}=\int_0^T\int_0^\ell \left[\mathscr{F}(u(t,x))-\sum_{n=1}^p \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \mathscr{F}(u(t,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]v(t,x)dxdt+\int_0^\ell \left[\psi(x)-\sum_{n=1}^p \psi_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]\cdot v(0,x)dx.$$

Тогда, очевидно, что

$$\left|J_{2,p}\right| \leq \left\| \mathscr{F}(u(t,x)) - \sum_{n=1}^{p} \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \mathscr{F}(u(t,\xi)) \sin\frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \cdot \sin\frac{n\pi}{\ell} x \right\|_{L_2(\mathscr{D}_T)} \cdot$$

$$\cdot \left\| v(t,x) \right\|_{L_2(D_T)} + \left\| \psi(x) - \sum_{n=1}^{p} \psi_n \sin\frac{n\pi}{\ell} x \right\|_{L_2(0,\ell)} \cdot \left\| v(0,x) \right\|_{L_2(0,\ell)} \to 0 \qquad \text{при}$$

$p \to \infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{p\to\infty} J_{2,p} = 0$.

Теперь, переходя к пределу при $p \to \infty$, из последнего равенства получаем, что выполняется интегральное тождество (1.19).

Таким образом, вышенайденная функция $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{n\pi}{\ell} x$ является обобщённым решением задачи (1.1)-(1.3).

2. Пусть *i*=1. Тогда из соотношения $Q_i(u) = u$ следует, что функции $u_n(t)$ $(n = 1,2,...)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (1.22), которая эквивалентна системе (1.21). Далее, так как $u(t,x) \in B_{2,2,T}^{3,2}$, то очевидно, что

$$u(t,x), u_t(t,x), u_x(t,x), u_{tx}(t,x), u_{xx}(t,x) \in C(\mathscr{D}_T), \tag{1.69}$$

$$u_{txx}, \quad u_{xxx} \in C([0,T]; \quad L_2(0,\ell)). \tag{1.70}$$

Далее, из (1.21$_6$) имеем

$$u_n''(t) = \vartheta_n(t) + \omega_n(t), \tag{1.71}$$

где

$$\vartheta_n(t) = -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \psi_n - \frac{2\alpha n\pi}{\ell^2} \int_0^t \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathscr{F}(u(\tau,\xi)) \times$$

$$\times \cos\frac{n\pi}{\ell} \xi \cdot \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau)\right] d\xi d\tau, \tag{1.72}$$

$$\omega_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \mathscr{F}(u(t,\xi)) \sin\frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi. \tag{1.73}$$

Так как $\vartheta_n(t) = -\dfrac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}u_n'(t)$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\cdot\max_{0\le t\le T}u_n'(t)\right)^2$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\max_{0\le t\le T}\vartheta_n(t)\right)^2 < +\infty. \tag{1.74}$$

Далее, очевидно, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2(t) = \frac{2}{\ell}\left\{\int_0^{\ell}\mathscr{F}(u(t,\xi))\cdot\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right\}^2 =$$

$$= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\{\mathscr{F}(u(t,\xi))\}^2 d\xi \equiv g(t)\in C[0,T], \tag{1.75}$$

ибо $\mathscr{F}(u(t,x))\in \mathrm{E}_{x^1}\subset C(D_T)$.

Тогда, в силу непрерывности на [0,T] всех функций $\omega_n(t)$ и суммы ряда (1.75), этот же ряд сходится на [0,T] равномерно. Так как $u_n''(t)=\vartheta_n(t)+\omega_n(t)$ и ряды (1.74) и (1.75) сходятся равномерно на [0,T], то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n''(t))^2 \tag{1.76}$$

также равномерно сходится на [0,T].

Так как все функции $\vartheta_n(t),\omega_n(t)$ (и, следовательно, $u_n''(t)$) непрерывны на [0,T] и ряд (1.76) равномерно сходится на [0,T], то функция $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n''(t))^2$ непрерывна на [0,T].

Тогда очевидно, что

$$u_{tt}\in C([0,T];L_2(0,\ell)). \tag{1.77}$$

Таким образом, из свойств (1.69), (1.70) и (1.77) следует, что

$$u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x)\in C(\mathscr{D}_T),$$

$$u_{tt}(t,x),\quad u_{txx}(t,x)\in L_2(\mathscr{D}_T).$$

Далее, из систем ($1.22_а$) и ($1.22_б$) легко получить, что $\forall t \in [0,T]$ и натурального p:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_p(t,x) - \alpha \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} u_p(t,x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{p} \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathscr{F}(u(t,\xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \tag{1.78}$$

где

$$u_p(t,x) = \sum_{n=1}^{p} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Для каждого фиксированного $t \in [0,T]$, переходя к пределу по метрике $L_2(0,\ell)$ в обеих частях равенства (1.78), легко получить, что при всех $t \in [0,T]$ почти всюду в $(0,\ell)$:

$$u_{tt}(t,x) - \alpha u_{txx}(t,x) = \mathscr{F}(u(t,x)).$$

Следовательно, функция $u(t,x)$ удовлетворяет почти всюду в $\mathscr{D}_T$ уравнению (1.1). Далее, легко проверить, что условия (1.2) и (1.3) выполняются в обычном смысле.

Таким образом, при $i=1$ функция $u(t,x)$ является решением почти всюду задачи (1.1)-(1.3).

3. Пусть *i*=2. Тогда из соотношения $Q_i(u) = u$ следует, что функции $u_n(t)$ $(n = 1,2,...)$ удовлетворяют на [0,T] системе (1.23), которая эквивалентна системе (1.21). Так как $u(t,x) \in \in B^{4,3}_{2,2,T}$, то очевидно, что

$$u(t,x),\quad u_t(t,x),\quad u_x(t,x),\quad u_{tx}(t,x),\quad u_{xx}(t,x),$$

$$u_{txx}(t,x),\quad u_{xxx}(t,x) \in C(\mathscr{D}_T),\quad u_{txxx}, u_{xxxx} \in C([0,T]; L_2(0,\ell)). \tag{1.79}$$

Далее, из ($1.21_б$) имеем:

$$u_n''(t) = \vartheta_n(t) + \omega_n(t), \tag{1.80}$$

где

$$\vartheta_n(t) = -\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t\right)\psi_n + \frac{2\alpha}{\ell}\int_0^t\int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{F}(u(\tau,\xi)).$$

$$\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\cdot\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]d\xi d\tau, \tag{1.81}$$

$$\omega_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \mathscr{F}(u(t,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi. \tag{1.82}$$

Так как $\vartheta_n(t) = -\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\,u_n'(t)$, то из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n'(t)\right|\right)^2$$

следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{0\le t\le T}\left|\vartheta_n(t)\right| = \frac{\alpha\pi^2}{\ell^2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n'(t)\right| \le$$

$$\le\frac{\alpha\pi^2}{\ell^2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n'(t)\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{0\le t\le T}\left|\vartheta_n(t)\right| < +\infty\ . \tag{1.83}$$

Из (1.83) видно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$ равномерно сходится в замкнутой области $\mathscr{D}_T = [0,T]\times[0,\ell]$. Следовательно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \in C(\mathscr{D}_T). \tag{1.84}$$

Далее, пользуясь тем, что $\mathscr{F}(u(t,x)) \in E_{x^2},\ \forall t\in[0,T]$ имеем:

$$\omega_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \mathscr{F}(u(t,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi = \frac{2}{n\pi}\int_0^\ell \frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(t,\xi))\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi.$$

Тогда очевидно, что при любом фиксированном $N\ (N=1,2,\cdots)\quad \forall t\in[0,T]$:

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty}\omega_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right|\le\sum_{n=N}^{\infty}|\omega_n(t)|\le\frac{2}{\pi}\left\{\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{n=N}^{\infty}\left[\int_0^{\ell}\frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(t,\xi))\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\le\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\ell}{2}}\left\{\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{\ell}\frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(t,\xi))\cdot\sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\frac{\sqrt{2\ell}}{\pi}\left\{\int_0^{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(t,\xi))\right]^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\le C_0\cdot\frac{\sqrt{2\ell}}{\pi}\cdot\left\{\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right\}^{\frac{1}{2}},\quad(1.85)$$

где

$$C_0\equiv\max_{0\le t\le T}\left\{\int_0^{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\mathscr{F}(u(t,\xi))\right]^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Из (1.85) видно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$ равномерно сходится в замкнутой области $\mathscr{D}_T$. Следовательно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\in C(\mathscr{D}_T).$$

Таким образом, ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n''(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x=\sum_{n=1}^{\infty}(\vartheta_n(t)+\omega_n(t))\sin\frac{n\pi}{\ell}x$ равномерно сходится в замкнутой области $\mathscr{D}_T$.

Следовательно:

$$u_{tt}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n''(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\in C(\mathscr{D}_T).\qquad(1.86)$$

Таким образом, из свойств (1.79) и (1.86) следует, что

$u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x), u_t(t,x), u_{tx}(t,x), u_{txx}(t,x),$
$u_{tt}(t,x) \in C(\mathscr{D}_T), u_{xxxx}(t,x), u_{txxx}(t,x) \in C([0,T]; L_2(0,\ell)).$

Далее, из системы (1.21) получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$u_{tt}(t,x) - \alpha u_{txx}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n''(t) + \alpha \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} u_n'(t)) \sin\frac{n\pi}{\ell}x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \mathscr{F}(u(t,\xi)) \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi \cdot \sin\frac{n\pi}{\ell}x = \mathscr{F}(u(t,x)).$$

Следовательно, функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в замкнутой области $\mathscr{D}_T$.

Легко проверить, что функция $u(t,x)$ удовлетворяет и всем условиям (1.2), (1.3). Таким образом, функция $u(t,x)$ является классическим решением задачи (1.1)-(1.3).

Этим теорема 1.4 доказана.

Теорема 1.5. Пусть

1. $i = 0,1,2$ и выполнено условие 2 теоремы 1.4.

2. $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2 + \mathscr{F}_3$, причём:

а) оператор $\mathscr{F}_1$ действует из $B_{2,T}^{1+i}$ в E_{x^i} непрерывно и

$\forall u \in B_{2,T}^{1+i}, \qquad t \in [0,T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}_1(u(t,x)) \right\|_{L_2(0,\ell)} \le a_1(t) + a_2(t) \|u\|_{B_{2,T}^{1+i}}^{\gamma} + a_3(t) \cdot \|u\|_{B_{2,T}^{1+i}}, \quad (1.87)$$

где пространство E_{x^i} $(i = 0,1,2)$ определено в пункте 3 §1, $a_i(t) \in L_2(0,T)$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$ и $0 < \gamma < 1$;

б) оператор $\mathscr{F}_2$ действует из некоторого шара $\mathscr{K}_i^*\left(\|u\|_{B_{2,T}^{1+i}} \le C_i\right)$ пространства $B_{2,T}^{1+i}$ в E_{x^i} непрерывно, где

$$C_i > C_{0,i} \equiv \max\left\{y : y^2 \le \left(\mathscr{A}_{1,i} + \mathscr{A}_{2,i}|y|^{2\gamma}\right)\mathscr{A}_{3,i}\right\}, \quad (1.88)$$

$$\mathscr{A}_{1,i} \equiv 2\|W\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{6\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)}{\alpha^2\pi^4} \|a_1(t)\|^2_{L_2(0,T)}, \qquad (1.89)$$

$$\mathscr{A}_{2,i} \equiv \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{6\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)}{\alpha^2\pi^4} \|a_2(t)\|^2_{L_2(0,T)}, \qquad (1.90)$$

$$\mathscr{A}_{3,i} \equiv \exp\left\{\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{6\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4} \cdot \|a_3(t)\|^2_{L_2(0,T)}\right\}, \qquad (1.91)$$

а функция $w(t,x)$ определена соотношением (1.52);

в) $\inf\limits_{u\in S_i}\left\{\|u - Q_{1,i}(u)\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} - \|Q_{2,i}(u)\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\right\} > 0, \qquad (1.92)$

где S_i - граница шара $\mathscr{K}_i\left(\|u\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le C_i\right)$,

$$Q_{1,i}(u) = W + \mathscr{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}_1(u(t,x))\right),\ Q_{2,i}(u) = \mathscr{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}_2(u(t,x))\right),$$

а операторы $\mathscr{P}_i$ $(i = 0,1,2)$ определены соотношениями (1.24)-(1.26);

г) оператор $\mathscr{F}_3$ действует из шара $\mathscr{K}_{\rho,i}\left(\|u\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le \rho_i\right)$ в E_{x^i} и для любых $u, v \in \mathscr{K}_{\rho_i}$:

$$\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}_3(u(t,x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}_3(v(t,x))\right\|_{L_2(D_T)} \le q_i\|u - v\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}, \ (1.93)$$

где

$$\rho_i \ge C_i,\ \rho_i \ge \rho_{0,i} \equiv \sup_{u\in K_i}\left\{\|Q_{1,i}(u) + Q_{2,i}(u)\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\right\}, \ (1.94)$$

$$\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^i \cdot \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \cdot q_i \equiv q_{0,i} \le 1 - \frac{\rho_{0,i}}{\rho_i}, \quad \rho_{0,i} < 1; \quad (1.95)$$

д)

$$\inf_{u\in S_i}\left\{\|u - Q_{1,i}(u) - Q_{2,i}(u)\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} - \|Q_{3,i}(u)\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\right\} > 0, \ (1.96)$$

где

$$Q_{3,i}(u) = \mathscr{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}_3(u(t,x))\right);$$

$e)\ \mathscr{F}_3(0) = 0.$

Тогда задача (1.1)-(1.3) имеет: при $i = 0$ обобщённое решение, при $i = 1$ решение почти всюду, а при $i = 3$ классическое решение.

Доказательство. Оператор $Q_{1,i}$ рассмотрим в пространстве $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$. Очевидно, что $\forall u, v \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$:

$$\left\|Q_{1,i}(u) - Q_{1,i}(v)\right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \le$$

$$\le \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^i \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}_1(u(t,x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}_1(v(t,x))\right\|_{L_2(D_T)}. \quad (1.97)$$

Из последнего неравенства, в силу условия $2a$ данной теоремы, следует, что оператор $Q_{1,i}$ действует из пространства $B_{2,T}^{1+i}$ в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ непрерывно. Так как (по теореме 1.1) пространство $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ вкладывается в пространство $B_{2,T}^{1+i}$ вполне непрерывно, то оператор $Q_{1,i}$ действует в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ вполне непрерывно.

Рассмотрим в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ уравнения

$$u = \mu \cdot Q_{1,i}(u), \quad \mu \in [0,1], \quad (1.98)$$

и априори оценим всевозможные их решения $u_\mu(t,x)$. Тогда, пользуясь неравенством (1.87), для любых $\mu \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$ имеем:

$$\left\|u_\mu\right\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} \equiv \left\|\mu \cdot Q_{1,i}\left(u_\mu\right)\right\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} \le \left\|Q_{1,i}\left(u_\mu\right)\right\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} \equiv$$

$$\equiv \left\|W + \mathscr{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}_1(u_\mu(t,x))\right)\right\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} \le 2\left\|W\right\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} +$$

$$+2\left\|\mathscr{F}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}_1(u_\mu(t,x))\right)\right\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}} \le 2\|W\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}} + 2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\cdot\int_0^t\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}_1(u_\mu(\tau,x))\right\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau \le 2\|W\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} +$$

$$+2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\cdot\int_0^t\Big\{a_1(\tau)+a_2(\tau)\cdot$$

$$\cdot\|u_\mu\|^\gamma_{B^{1+i}_{2,T}}+a_3(\tau)\|u_\mu\|_{B^{1+i}_{2,\tau}}\Big\}^2 d\tau \le 2\|W\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} +$$

$$+6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\cdot\Big\{\int_0^t a_1^2(\tau)d\tau+$$

$$+\|u_\mu\|^{2\gamma}_{B^{1+i}_{2,T}}\cdot\int_0^t a_2^2(\tau)d\tau+\int_0^t a_3^2(\tau)\|u_\mu\|^2_{B^{1+i}_{2,\tau}}d\tau\Big\} \le 2\|W\|^2_{B^{2,i,1+i}_{2,2,T}} +$$

$$+\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\frac{6\left(\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\cdot\Big\{\|a_1(t)\|^2_{L_2(o,T)}+$$

$$+\|u_\mu\|^{2\gamma}_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\cdot\|a_2(t)\|^2_{L_2(0,T)}+\int_0^t a_3^2(\tau)\|u_\mu\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,\tau}}d\tau\Big\},$$

причём здесь пользовались тем, что $\forall\tau\in[0,T]$ $\|u\|_{B^{1+i}_{2,\tau}} \le \|u\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,\tau}}$ и, следовательно, $\|u\|_{B^{1+i}_{2,T}} \le \|u\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}$. Таким образом, $\forall\mu\in[0,1]$ и $t\in[0,T]$ имеем:

$$\|u_\mu\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}} \le 2\|W\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{6\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4} \cdot \left[\|a_1(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \right.$$

$$\left. + \|a_2(t)\|^2_{L_2(0,T)} \cdot \|u_\mu\|^{2\gamma}_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \right] + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{6\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\ell^2\pi^4} \cdot$$

$$\cdot \int_0^t a_3^2(\tau)\|u_\mu\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,\tau}} d\tau. \qquad (1.99)$$

Из (1.99), применив неравенство Р.Беллмана, получаем, что $\forall \mu \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$:

$$\|u_\mu\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}} \le \left\{ 2\|W\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{6\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4} \cdot \left[\|a_1(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \|a_2(t)\|^2_{L_2(0,T)} \cdot \|u_\mu\|^{2\gamma}_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \right]\right\} \cdot \exp\left[\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \frac{6\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \|a_3(t)\|^2_{L_2(0,T)} \right]. \qquad (1.100)$$

Отсюда, пользуясь обозначениями (1.89)-(1.91), $\forall \mu \in [0,1]$ имеем:

$$\|u_\mu\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le \left(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \cdot \|u_\mu\|^{2\gamma}_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \right) \mathcal{A}_3. \qquad (1.101)$$

А из (1.101), пользуясь обозначением (1.88), имеем:

$$\|u_\mu\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le C_{0,i} \quad \forall \mu \in [0,1], \qquad (1.102)$$

т.е. всевозможные решения u_μ уравнений (1.98) принадлежат шару

$$\mathcal{K}_{0,i}\left(\|u\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le C_{0,i}\right).$$

Из (1.98) и (1.102) видно, что при любом $\mu \in [0,1]$ вполне непрерывное векторное поле $\Phi_{\mu,i} = \mathcal{I} - \mu \cdot Q_{1,i}$ не имеет нулей на границе S_i шара $\mathcal{K}_i\left(\|u\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le C_i\right)$, где числа C_i определены соотношением (1.88). Следовательно, вполне непрерывные векторные поля $\Phi_0 = \mathcal{J}$ и $\Phi_{1,i} = \mathcal{J} - Q_{1,i}$ гомотопны на сфере S_i. Тогда вращения на S_i этих полей одинаковы, а именно:

$$\gamma(\mathcal{J} - Q_{1,i}; S_i) = \gamma(\mathcal{J}; S_i) = 1. \tag{1.103}$$

Теперь рассмотрим оператор $Q_{2,i}$ в шаре $\mathcal{K}_i$. Аналогично тому, как показали полную непрерывность оператора $Q_{1,i}$ в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$, легко показать, что оператор $Q_{2,i}$ действует из шара K_i в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ вполне непрерывно.

Далее, на границе S_i шара $\mathcal{K}_i$ рассмотрим вполне непрерывные векторные поля $\mathcal{J} - Q_{1,i} - \lambda Q_{2,i}$, где $\lambda \in [0,1]$. В силу условия 2в данной теоремы, для любых $\lambda \in [0,1]$ и $u \in S_i$ имеем:

$$\left\| u - Q_{1,i}(u) - \lambda Q_{2,i}(u) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \geq \left\| u - Q_{1,i}(u) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} - \lambda \left\| Q_{2,i}(u) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \geq$$

$$\geq \left\| u - Q_{1,i}(u) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} - \left\| Q_{2,i}(u) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} > 0. \tag{1.104}$$

Отсюда, в частности, следует, что вполне непрерывные векторные поля $\mathcal{J} - Q_{1,i}$ и $\mathcal{J} - Q_{1,i} - Q_{2,i}$ гомотопны на сфере S_i. Следовательно, на S_i их вращения равны:

$$\gamma(\mathcal{J} - Q_{1,i} - Q_{2,i}; S_i) = \gamma(\mathcal{J} - Q_{1,i}; S_i) = \gamma(\mathcal{J}; S_i) = 1. \tag{1.105}$$

А теперь в шаре $\mathcal{K}_{\rho,i} \left(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \rho_i \right)$ рассмотрим оператор

$$Q_{3,i} = \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_3(u(t,x)) \right),$$

где числа ρ_i определены соотношением (1.94). Легко видеть, что для любых $u, v \in \mathcal{K}_{\rho,i}$:

$$\left\| Q_{3,i}(u) - Q_{3,i}(v) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_3(u(t,x)) - \right.$$

$$-\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}_3(v(t,x))\Bigg\|_{L_2(D_T)} \le \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^i \cdot \frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\cdot q_i\|u-v\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} =$$

$$= q_{0,i}\cdot\|u-v\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}, \qquad (1.106)$$

где числа $q_{0,i}$ определены соотношением (1.95).

Для каждого фиксированного $v_0 \in \mathcal{K}_{\rho_{0,i}}\left(\|u\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le \rho_{0,i}\right)$, где числа $\rho_{0,i}$ определены соотношением (1.94) и $\varepsilon \in [0,1]$, рассмотрим в шаре $\mathcal{K}_{\rho,i}$ следующее уравнение (относительно u):

$$u = \varepsilon \cdot Q_{3,i}(u) + v_0. \qquad (1.107)$$

Так как для любых $u, u_1, u_2 \in \mathcal{K}_{\rho,i}$:

$$\|\varepsilon Q_{3,i}(u) - v_0\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le \|Q_{3,i}(u)\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + \|v_0\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} =$$

$$= \|Q_{3,i}(u) - Q_{3,i}(o)\|^{*)}_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + \|v_0\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le q_{0,i}\|u\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} +$$

$$+ \|v_0\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le q_{0,i}\cdot\rho_i + \rho_{0,i} \le \rho_i,$$

$$\|\varepsilon Q_{3,i}(u_1) + v_0 - [\varepsilon\cdot Q_{3,i}(u_2) + v_0]\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le$$

$$\le \|Q_{3,i}(u_1) - Q_{3,i}(u_2)\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le q_{0,i}\cdot\|u_1 - u_2\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}},$$

причём $q_{0,i} < 1$, то, в силу принципа сжатых отображений, оператор $\mathcal{A}_i(u) = \varepsilon\cdot Q_{3,i}(u) + v_0$ имеет в шаре $V_{\rho,i}$ единственную неподвижную точку u_0. Сопоставляя каждому $V_0 \in \mathcal{K}_{\rho_0,T}$ элемент u_0, т.е. единственное в $\mathcal{K}_{\rho_i}$ решение уравнения (1.107), порождаем некоторый оператор $R_{\varepsilon,i}$ (этот оператор $R_{\varepsilon,i}$ называется

---

*) Очевидно, что $Q_{3,i}(0) = \mathcal{P}_i\left(\frac{\partial i^i}{\partial x^i}\mathcal{F}_3(0)\right) = \mathcal{P}_i(0) = 0$.

резольвентой, вообще говоря, нелинейного оператора $Q_{3,i}$), действующий из шара $\mathcal{K}_{\rho_0,i}$ в шар $\mathcal{K}_{\rho,i}$. Пользуясь тем, что для любых $\varepsilon \in [0,1]$ и $v \in \mathcal{K}_{\rho_0,i}$ $R_{\varepsilon,i}(v) = \varepsilon Q_{3,i}(R_{\varepsilon,i}v) + v$, легко получить, что $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{K}_{\rho_0,i}$:

$$\left\| R_{\varepsilon,i}(v_1) - R_{\varepsilon,i}(v_2) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \le \frac{1}{1-\varepsilon q_{0,i}} \left\| v_1 - v_2 \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}. \qquad (1.108)$$

В силу обозначения (1.93) $(Q_{1,i} + Q_{2,i})\mathcal{K}_i \subset \mathcal{K}_{\rho_0,i}$. Следовательно, для каждого $\varepsilon \in [0,1]$ оператор $R_{\varepsilon,i}$ определен, в частности, и на $(Q_{1,i} + Q_{2,i})\mathcal{K}_i$. В силу (1.108) оператор $R_{\varepsilon,i}$ непрерывен (даже удовлетворяет условию Липшица) на множестве $(Q_{1,i} + Q_{2,i})\mathcal{K}_i$. Так как операторы $Q_{1,i}$ и $Q_{2,i}$ вполне непрерывны на $\mathcal{K}_i$ для каждого $\varepsilon \in [0,1]$ операторы $R_{\varepsilon,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i})$ вполне непрерывны на $\mathcal{K}_i$. Далее, в силу (1.96), для любых $\varepsilon \in [0,1]$ на S_i

$$\left\| u - Q_{1,i}(u) - Q_{2,i}(u) - \varepsilon Q_{3,i}(u) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \ge$$

$$\ge \left\| u - Q_{1,i}(u) - Q_{2,i}(u) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} - \left\| Q_{3,i}(u) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} > 0. \qquad (1.109)$$

Следовательно, вполне непрерывные векторные поля $\mathcal{I} - Q_{1,i} - Q_{2,i} - \varepsilon Q_{3,i}$ при любом $\varepsilon \in [0,1]$ не имеют нулей на S_i. Тогда не имеют на S_i нулей и вполне непрерывные векторные поля $\mathcal{I} - R_{\varepsilon,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i})$, ибо каждый нуль (на S_i) поля $\mathcal{I} - R_{\varepsilon,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i})$, является одновременно и нулем поля $\mathcal{I} - Q_{1,i} - Q_{2,i} - \varepsilon Q_{3,i}$. Таким образом, вполне непрерывные векторные поля $\mathcal{I} - R_{0,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i}) = \mathcal{I} - Q_{1,i} - Q_{2,i}$ и $\mathcal{I} - R_{0,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i})$ гомотопны на S_i.

Следовательно, учитывая (1.105), имеем

$$\gamma(\mathcal{I} - R_{1,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i}); S_i) = \gamma(\mathcal{I} - Q_{1,i} - Q_{2,i}; S_i) = 1. \qquad (1.110)$$

Отсюда, в силу принципа ненулевого вращения, следует, что вполне непрерывное векторное поле $\mathcal{I} - R_{1,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i})$ имеет внутри шара $\mathcal{K}_i$ по крайней мере один нуль. Так как каждый такой нуль является одновременно и нулем поля $\mathcal{I}-Q_{1,i}-Q_{2,i}-Q_{3,i}$, то, таким образом, доказано существование в K_i по крайней мере одной неподвижной точки $u(t,x)$ у оператора $Q_{1,i}+Q_{2,i}+Q_{3,i}=Q_i$.

Совершенно так, как в конце процесса доказательства предыдущей теоремы, легко проверить, что эта неподвижная точка $u(t,x)$ является: при $i=0$ обобщённым решением, при $i=1$ решением почти всюду, а при $i=2$ классическим решением задачи (1.1)-(1.3).

Теорема доказана.

Замечание 1.2. Очевидно, что неравенство (1.92) имеет место, например, если

$$\sup_{u\in S_i}\left\{\left\|Q_{2,i}(u)\right\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\right\}<\inf_{u\in S_j}\left\{\left\|u-Q_{1,i}(u)\right\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\right\}. \qquad (1.111)$$

Как видно из процесса доказательства теоремы 1.5, правая часть неравенства (1.111) положительна (см. соотношения (1.98), (1.102) и (1.88)). Таким образом, неравенство (1.111) (а также неравенство (1.92)) требует достаточную малость норм $\left\|Q_{2,i}(u)\right\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}$ для элементов $u\in S_i$. То же самое относится и к неравенству (1.96).

Замечание 1.3. Как видно из процесса доказательства теоремы 1.4. и структуры пространств $B^{3,2}_{2,2,T}$ и $B^{4,3}_{2,2,T}$, почти всюду и классические решения $u(t,x)$ задачи (1.1)-(1.3), найденные нами в теоремах 1.4 и 1.5, обладают следующими дополнительными (по сравнению с определением почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3)) свойствами:

1) для решения почти всюду

$$u_{xxx},u_{txx},u_{xtx},u_{xxt},u_{tt}\in C([0,T];\quad L_2(0,\ell));$$

2) а для классического решения

$$u_{xxx}(t,x),u_{txx},u_{xtx}(t,x),u_{xxt}(t,x)\in C(\mathcal{D}_T),$$

$$u_{xxxx},u_{txxx},u_{xtxx},u_{xxtx},u_{xxxt},u_{ttx}\in C([0,T];\quad L_2(0,\ell)).$$

§4. Исследование существования и единственности решений задачи (1.1)-(1.3).

В этом параграфе методом последовательных приближений доказывается следующая теорема о существовании и единственности обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3).

Теорема 1.6. Пусть

1. $i = 0,1,2$ и выполнено условие 2 теоремы 1.4.

2. Оператор $\mathscr{F}$ действует из $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ в E_{x^i} и $\forall u \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$, $t \in [0,T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u(t,x)) \right\|_{L_2(0,\ell)} \le a(t) + b(t) \|u\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}}, \tag{1.112}$$

где пространство E_{x^i} $(i = 0,1,2)$ определено в пункте 3 §1, $a(t), b(t) \in L_2(0,T)$ и $0 < \gamma < 1$.

3. Для любых $u, v \in \mathscr{K}_0\left(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \le C_0 \right)$ и $t \in [0,T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u(t,x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(v(t,x)) \right\|_{L_2(0,\ell)} \le c(t) \|u - v\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}}, \tag{1.113}$$

где $c(t) \in L_2(0,T)$,

$$C_0 \equiv \left\{ \left[2\|w(t,x)\|^2_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} + 4\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \right)^2 \cdot \|a(t)\|^2_{L_2(0,T)} \right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \exp\left[4\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \right)^2 \cdot \|b(t)\|^2_{L_2(0,T)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.114}$$

а функция *w(t,x)* определена соотношением (1.52).

Тогда задача (1.1)-(1.3) имеет: при $i = 0$ единственное обобщённое решение $u(t,x)$, при $i = 1$ единственное в $B_{2,2,T}^{3,2}$ решение почти всюду $u(t,x)$, а при $i = 2$ единственное в $B_{2,2,T}^{4,3}$ классическое решение $u(t,x)$; их можно найти методом последовательных приближений, причём скорость сходимости последовательных приближений $u_k(t,x)$ к $u(t,x)$ характеризуется так:

$$\left\| u_k(t,x) - u(t,x) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \le C_0 \cdot \frac{\left[\left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \cdot \left\| c(t) \right\|_{L_2(0,T)} \right]^k}{\sqrt{k!}}$$

$$(k = 0,1,2,\cdots). \quad (1.115)$$

Доказательство. Очевидно, что оператор

$$Q_i(u) = w + \mathscr{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u(t,x)) \right), \quad (1.116)$$

где операторы $\mathscr{P}_i$ определены соотношениями (1.24)-(1.26), действуют в пространстве $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ и в шаре $\mathscr{K}_0$ удовлетворяют условию Липшица:

$$\left\| Q_i(u) - Q_i(v) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \le \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \cdot \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \left\| c(t) \right\|_{L_2(0,T)} \cdot \left\| u - v \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}. \quad (1.117)$$

Рассмотрим в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ последовательность $u_k(t,x) = Q_i(u_{k-1}(t,x))$, где $u_0(t,x) \equiv 0$. Пользуясь неравенством (1.112), методом математической индукции легко получить, что для любых $k (k = 0,1,2,...)$ и $t \in [0,T]$:

$$\left\| u_k \right\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} = \left\| Q_i(u_{k-1}) \right\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} = \left\| w + \mathscr{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u_{k-1}(t,x)) \right) \right\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} \le$$

$$\le 2\left\| w \right\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} + 2\left\| \mathscr{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u_{k-1}(t,x)) \right) \right\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} \le 2\left\| w \right\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} +$$

$$+ 2\left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \right)^2 \cdot \int_0^t \int_0^\ell \left[\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u_{k-1}(\tau,x)) \right]^2 dx d\tau \le$$

$$\leq 2\|w\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + 4\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \int_0^t \left\{a^2(\tau) + b^2(\tau)\|u_{k-1}\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,\tau}}\right\} d\tau \leq$$

$$\leq \mathscr{A}^2 + \mathscr{A}^2 \int_0^t B^2(\tau)d\tau + \cdots + \mathscr{A}^2 \cdot \frac{\left\{\int_0^t B^2(\tau)d\tau\right\}^k}{k!}, \tag{1.118}$$

где

$$\mathscr{A}^2 \equiv 2\|w\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + 4\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \|a(t)\|^2_{L_2(0,T)},$$

$$B^2(\tau) \equiv 4\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot b^2(\tau).$$

На самом деле, при $k = 1$ неравенство (1.118) справедливо. Предположим, что неравенство (1.118) справедливо для $k = m$ и докажем его справедливость и для $k = m + 1$. Очевидно, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\|u_{m+1}\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}} \leq A^2 + \int_0^t B^2(\tau)\|u_m\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,\tau}} d\tau \leq \mathscr{A}^2 +$$

$$+ \int_0^t B^2(\tau)\left\{\mathscr{A}^2 + \mathscr{A}^2 \int_0^\tau B^2(s)ds + \cdots + \mathscr{A}^2 \cdot \frac{\left[\int_0^\tau B^2(s)ds\right]^m}{m!}\right\}d\tau =$$

$$= \mathscr{A}^2 + \mathscr{A}^2 \cdot \int_0^t B^2(\tau)d\tau + \mathscr{A}^2 \cdot \int_0^t B^2(\tau)\int_0^\tau B^2(s)ds d\tau + \cdots +$$

$$+\mathscr{A}^2\cdot\int_0^t B^2(\tau)\cdot\frac{\left[\int_0^\tau B^2(s)ds\right]^m}{m!}d\tau=\mathscr{A}^2+\mathscr{A}^2\cdot\int_0^t B^2(\tau)d\tau+$$

$$+\mathscr{A}^2\cdot\frac{\left[\int_0^t B^2(\tau)d\tau\right]^2}{2}+\cdots+\mathscr{A}^2\cdot\frac{\left[\int_0^t B^2(\tau)d\tau\right]^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Из (1.118) следует, что $\forall k(k=0,1,2,\cdots)$ и $t\in[0,T]$:

$$\|u_k\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}}\le\mathscr{A}^2\left\{1+\int_0^t B^2(\tau)d\tau+\cdots+\frac{\left[\int_0^t B^2(\tau)d\tau\right]^k}{k!}\right\}\le$$

$$\le\mathscr{A}^2\left\{1+\int_0^T B^2(\tau)d\tau+\cdots+\frac{\left[\int_0^T B^2(\tau)d\tau\right]^k}{k!}+\cdots\right\}=$$

$$=\mathscr{A}^2\cdot\exp\left\{\int_0^T B^2(\tau)d\tau\right\}. \tag{1.119}$$

Следовательно, $\forall k(k=0,1,2,\cdots)$:

$$\|u_k\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\le\mathscr{A}^2\cdot\exp\left\{\int_0^T B^2(\tau)d\tau\right\}\equiv C_0^2\ , \tag{1.120}$$

т.е. все приближения $u_k(t,x)$ содержатся в шаре $\mathscr{K}_0$.

Далее, пользуясь условием 3 данной теоремы и учитывая (1.120), легко получить, что для любых $t\in[0,T]$ и k $(k=1,2,...)$:

$$\|u_{k+1}(t,x)-u_k(t,x)\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}}=\left\|\mathscr{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}(u_k(t,x))-\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}(u_{k-1}(t,x))\right)\right\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}}\le$$

$$\le\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha^2\pi^4}\right)^2\cdot\int_0^t\int_0^l\left\{\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}(u_k(\tau,x))-\right.$$

$$-\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}(u_{k-1}(\tau,x))\Bigg\}^2 dxd\tau = \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}(u_k(\tau,x))-\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}(u_{k-1}(\tau,x))\right\|^2_{L_2(0,t)} d\tau \le$$

$$\le\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot\int_0^t c^2(\tau)\|u_k-u_{k-1}\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,\tau}}d\tau\le$$

$$\le\|u_1-u_0\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\cdot\frac{\left[\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot\int_0^t c^2(\tau)d\tau\right]^k}{k!}=$$

$$=\|u_1\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,\tau}}\cdot\frac{\left[\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot\int_0^t c^2(\tau)d\tau\right]^k}{k!}. \quad (1.121)$$

Следовательно,

$$\|u_{k+1}(t,x)-u_k(t,x)\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\le$$

$$\le C_0^2\cdot\frac{\left\{\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot\|c(t)\|^2_{L_2(o,T)}\right\}^k}{k!}\,(k=0,1,2,\cdots).(1.122)$$

Отсюда следует фундаментальность $\{u_k(t,x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$. В силу полноты пространства $B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$:

$$u_k(t,x)\xrightarrow{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}u(t,x)\in\mathcal{K}_0 \text{ при } k\to\infty.$$

Тогда, пользуясь непрерывностью оператора Q_i в шаре $\mathcal{K}_0$ (см. неравенство (1.117)), из соотношений $u_k(t,x) = Q_i(u_{k-1}(t,x))$ имеем:

$$u(t,x) = Q_i(u(t,x)).$$

Легко проверить (так, как в конце доказательства теоремы 1.4), что функция $u(t,x)$ является: при $i=0$ обобщённым решением, при $i=1$ решением почти всюду, а при $i=2$ классическим решением задачи (1.1)-(1.3).

Далее, аналогично (1.121) и (1.122), имеем

$$\|u_k(t,x)-u(t,x)\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le \|u_0(t,x)-u(t,x)\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left\{\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \|c(t)\|^2_{L_2(o,T)}\right\}^k}{k!} \le$$

$$\le C_0^2 \cdot \frac{\left\{\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \|c(t)\|^2_{L_2(o,T)}\right\}^k}{k!}.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (1.115).

Наконец, докажем единственность в $B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$ $(i=0,1,2)$ решений (обобщённого, почти всюду и классического) задачи (1.1)-(1.3). Пусть $u(t,x) \in B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$ при $i=0,1,2$ - любое соответственно обобщённое, почти всюду и классическое решения задачи (1.1)-(1.3). Тогда, в силу лемм 1.1 и 1.2, коэффициенты Фурье $u_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u(t,x) Sin \frac{n\pi}{\ell} x dx$ функции $u(t,x)$ удовлетворяют на [0,T] системе (1.21), причём, в силу того, что $\mathcal{F}(u(t,x)) \in E_{x^i}$, систему (1.21) можно преобразовать к виду (1.22) при $i=1$ и к виду (1.23) при $i=2$. Таким образом, функция $u(t,x)$ является в

$B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ неподвижной точкой оператора $Q_i(i=0,1,2)$. Тогда, пользуясь неравенством (1.112), аналогично (1.119), $\forall t\in[0,T]$ имеем:

$$\|u\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} \le \mathscr{A}^2 + \int_0^t B^2(\tau)\|u\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} d\tau.$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем:

$$\|u\|^2_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \le \mathscr{A}^2 \cdot \exp\left\{ \int_0^T B^2(\tau)d\tau \right\} = C_0^2,$$

т.е. всевозможные в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ $(i=0,1,2)$ соответственно обобщённые, почти всюду и классических решения задачи (1.1)-(1.3) принадлежат шару $\mathscr{K}_0$. Пусть $u(t,x)$ и $v(t,x)$ - два любых обобщённых, почти всюду и классических решения задачи (1.1)-(1.3) соответственно в $B_{2,2,T}^{2,1}$, $B_{2,2,T}^{3,2}$ и $B_{2,2,T}^{4,3}$. Тогда, пользуясь условием 3 данной теоремы и соотношениями $u(t,x)$, $v(t,x)\in\mathscr{K}_0$, легко получить, что для любого $t\in[0,T]$:

$$\|u-v\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} \le \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \int_0^t \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}(u(\tau,x)) -\right.$$

$$\left. -\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}(v(\tau,x)) \right\|^2_{L_2(o,\ell)} d\tau \le \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \int_0^t c^2(\tau)\|u-v\|^2_{B_{2,2,\tau}^{2+i,1+i}} d\tau.$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем, что $\|u-v\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} \equiv 0$ на [0,T]. Следовательно, $u=v$. Теорема доказана.

Из теоремы 1.6 при $i=0$ вытекает следующее

Следствие 1.2. Пусть

1.Для $i=0$ выполнено условие 2 теоремы 1.4.

2.Оператор $\mathscr{F}$ порожден функцией $F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})$, т.е.

Тогда, пользуясь неравенством (1.123) и оценками (1.125)-(1.129), $\forall\, u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\in B^{2,1}_{2,2,T}$ и $t\in[0,T]$ имеем:

$$\|\mathscr{F}(u(t,x))\|_{L_2(0,\ell)}=$$

$$=\left\|F\big(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x)\big)\right\|_{L_2(0,\ell)}\le$$

$$\le\left\|\mathscr{A}_1(t,x)+\mathscr{A}_2(t,x)\cdot\big[|u(t,x)|+|u_t(t,x)|+|u_x(t,x)|\big]+\right.$$

$$\left.+\mathscr{A}_3(t)\cdot\big[|u_{tx}(t,x)|+|u_{xx}(t,x)|\big]\right\|_{L_2(0,\ell)}\le\|\mathscr{A}_1(t,x)\|_{L_2(0,\ell)}+$$

$$+\left\|\mathscr{A}_2(t,x)\cdot\big[|u(t,x)|+|u_t(t,x)|+|u_x(t,x)|\ \big]\right\|_{L_2(0,\ell)}+$$

$$+\mathscr{A}_3(t)\cdot\Big[\|u_{tx}(t,x)\|_{L_2(0,\ell)}+\|u_{xx}(t,x)\|_{L_2(0,\ell)}\ \Big]\le\|\mathscr{A}_1(t,x)\|_{L_2(0,\ell)}+$$

$$+\left(\frac{\pi}{3\sqrt{10}}+\frac{\pi}{\sqrt{6}}+\frac{\pi}{\ell\sqrt{6}}\right)\cdot\|u\|_{B^{2,1}_{2,2,t}}\cdot\|\mathscr{A}_2(t,x)\|_{L_2(0,\ell)}+$$

$$+\sqrt{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{\pi}{\ell}+\frac{\pi^2}{\ell^2}\right)\mathscr{A}_3(t)\cdot\|u\|_{B^{2,1}_{2,2,t}}=a(t)+b(t)\cdot\|u\|_{B^{2,1}_{2,2,t}}\,. \qquad (1.130)$$

Следовательно, для $i=0$ условие 2 теоремы 1.6 выполнено.

Теперь пусть $u(t,x)$, $v(t,x)$ - любые две функции, принадлежащие шару $\mathscr{K}_0\left(\|u\|_{B^{2,1}_{2,2,T}}\le C_0\right)$, где C_0 - число, фигурирующее в условии 3 данного следствия.

Тогда, в силу оценок (1.125)-(1.127), $\forall u(t,x),v(t,x)\in\mathscr{K}_0$ и $t\in[0,T]$, $x\in[0,\ell]$ имеем:

$$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{3\sqrt{10}}C_0\le u(t,x),\quad v(t,x)\le\dfrac{\pi}{3\sqrt{10}}C_0,\\[2mm] -\dfrac{\pi}{\sqrt{6}}C_0\le u_t(t,x),v_t(t,x)\le\dfrac{\pi}{\sqrt{6}}C_0,\\[2mm] -\dfrac{\pi^2}{\ell\sqrt{6}}C_0\le u_x(t,x),v_x(t,x)\le\dfrac{\pi}{\ell\sqrt{6}}C_0.\end{cases} \qquad (1.131)$$

Тогда, пользуясь соотношениями (1.131) и условием 3 данного следствия (т.е. неравенством (1.124)), совершенно аналогично неравенству (1.130), $\forall u(t,x), v(t,x) \in \mathcal{K}_0$ и $t \in [0, T]$ имеем:

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{F}(u(t,x)) - \mathcal{F}(u(t,x))\right\|_{L_2(0,\ell)} = \\
&= \big\| F\big(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x)\big) - \\
&- F\big(t,x,v(t,x),v_t(t,x),v_x(t,x),v_{tx}(t,x),v_{xx}(t,x)\big) \big\|_{L_2(0,\ell)} \le \\
&\le \big\| B_1(t,x)\cdot \big[|u(t,x)-v(t,x)| + |u_t(t,x)-v_t(t,x)| + \\
&+ |u_x(t,x)-v_x(t,x)| \ \big] \big\|_{L_2(0,\ell)} + B_2(t)\cdot \big[\|u_{tx}(t,x)-v_{tx}(t,x)\|_{L_2(0,\ell)} + \\
&+ \|u_{xx}(t,x)-v_{xx}(t,x)\|_{L_2(0,\ell)} \ \big] \le \left(\frac{\pi}{3\sqrt{10}} + \frac{\pi}{\sqrt{6}} + \frac{\pi}{\ell\sqrt{6}} \right) \cdot \|u-v\|_{B^{2,1}_{2,2,t}} \cdot \\
&\cdot \|B_1(t,x)\|_{L_2(0,\ell)} + \sqrt{\frac{\ell}{2}} \cdot \left(\frac{\pi}{\ell} + \frac{\pi^2}{\ell^2} \right) \cdot \|u-v\|_{B^{2,1}_{2,2,t}} \cdot B_2(t) = c(t)\cdot \|u-v\|_{B^{2,1}_{2,2,t}} ,
\end{aligned}
$$

т.е. для $i = 0$ выполнено условие 3 теоремы 1.6.

Таким образом, для $i = 0$ все условия теоремы 1.6 выполнены. А тогда утверждение данного следствия следует из утверждения теоремы 1.6.

§5. Ещё раз о существовании решений задачи (1.1)-(1.3).

В этом параграфе, с помощью выше доказанной теоремы 1.6 и принципа Шаудера, доказывается следующая теорема о существовании обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3).

Теорема 1.7. Пусть

1. $i = 0,1,2$ и выполнено условие 2 теоремы 1.4.
2. $\mathcal{F}(u) = \Phi(u,u)$, причём:

   а) оператор $\Phi(u,v)$ действует из $B^{1+i}_{2,T} \times B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$ в E_{x^i}, причём для любых $u \in B^{1+i}_{2,T}$, $v \in B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$ и $t \in [0,T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t,x), v(t,x)) \right\|_{L_2(0,\ell)} \le a_1(t) + a_2(t) \|u\|^{\gamma}_{B^{1+i}_{2,T}} +$$

$$+ a_3(t) \|u\|_{B^{1+i}_{2,t}} + a_4(t) \|v\|^{\gamma}_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + a_5(t) \|v\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}}, \qquad (1.132)$$

где $a_i(t) \in L_2(0,T) \quad (i = \overline{1,5}), \quad 0 < \gamma < 1$;

б) для любых $u \in \mathcal{K}_0 \left(\|u\|_{B^{1+i}_{2,T}} \le C_0 \right)$, $v_1, v_2 \in B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$ и $t \in [0,T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t,x), v_1(t,x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t,x), v_2(t,x)) \right\|_{L_2(0,\ell)} \le$$

$$\le b(t) \|v_1 - v_2\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}}, \qquad (1.133)$$

где $b(t) \in L_2(0,T)$,

$$C_0 \equiv \max \left\{ y : y^2 \le (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 |y|^{2\gamma}) \mathcal{A}_3 \right\}, \qquad (1.134)$$

$$\mathcal{A}_1 \equiv 2\|w\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{10\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \|a_1(t)\|^2_{L_2(0,T)}, \qquad (1.135)$$

$$\mathcal{A}_2 \equiv \frac{10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \left[\|a_2(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \|a_4(t)\|^2_{L_2(0,T)} \right], \qquad (1.136)$$

$$\mathcal{A}_3 \equiv \exp\left\{ \frac{10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2 \pi^4} \left[\|a_3(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \|a_5(t)\|^2_{L_2(0,T)} \right] \right\}, \qquad (1.137)$$

а функция $w(t,x)$ определена равенством (1.52);

в) для каждого фиксированного $v \in \mathcal{K}\left(\|v\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le C\right)$ оператор $\mathcal{F}(u,v)$ действует из шара $\mathcal{K}_0 \left(\|u\|_{B^{1+i}_{2,T}} \le C_0 \right)$ в E_{x^i} непрерывно, где

$$C = \min\{ C_1, C_2 \}, \qquad (1.138)$$

$$C_1 \equiv \left\{ \left[2\|w(t,x)\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + 8\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4} (\|a_1(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \right.\right.$$

$$\left. + \|a_2(t)\|^2_{L_2(0,T)} \cdot C_0^{2\gamma} + \|a_3(t)\|^2_{L_2(0,T)} \cdot C_0^2) \right] \cdot$$

$$\left. \cdot \exp\left[8\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4} \cdot \|b(t)\|^2_{L_2(0,T)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.139)$$

$$C_2 \equiv \max\left\{ y : y^2 \le \left(\tilde{\mathscr{A}}_1 + \tilde{\mathscr{A}}_2 |y|^{2\gamma}\right)\tilde{\mathscr{A}}_3 \right\}, \qquad (1.140)$$

$$\tilde{\mathscr{A}}_1 \equiv 2\|w(t,x)\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + 10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4} \left[\|a_1(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \right.$$

$$\left. + \|a_2(t)\|^2_{L_2(0,T)} \cdot C_0^{2\gamma} + \|a_3(t)\|^2_{L_2(0,T)} \cdot C_0^2 \right], \qquad (1.141)$$

$$\tilde{\mathscr{A}}_2 \equiv 10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4} \|a_4(t)\|^2_{L_2(0,T)},$$

$$\tilde{\mathscr{A}}_3 \equiv \exp\left[10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4} \|a_5(t)\|^2_{L_2(0,T)} \right]. \qquad (1.142)$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) имеет: при $i = 0$ обобщённое решение, при $i = 1$ решение почти всюду, а при $i = 2$ классическое решение.

Доказательство. На топологическом произведении $B^{1+i}_{2,T} \times B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$ определим следующий оператор $\tilde{\mathscr{F}}$:

$$\tilde{\mathscr{F}}(u,v) = \begin{cases} \mathscr{F}(u,v) & при \quad u \in \mathscr{K}_0, v \in B^{2+i,1+i}_{2,2,T}, \\ \mathscr{F}\left(C_0 \dfrac{u}{\|u\|_{B^{1+i}_{2,T}}}, v\right) & при \quad u \in B^{1+i}_{2,T} / \mathscr{K}_0, v \in B^{2+i,1+i}_{2,2,T} \end{cases} . \qquad (1.143)$$

Очевидно, что любых $u \in B^{1+i}_{2,T}, v_1, v_2 \in B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$ и $t \in [0,T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathscr{F}}(u(t,x), v(t,x)) \right\|_{L_2(o,\ell)} \le a_1(t) + a_2(t)\|u\|^{\gamma}_{B^{1+i}_{2,T}} + a_3(t)\|u\|_{B^{1+i}_{2,T}} +$$

$$+a_4(t)\|v\|^{\gamma}_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}+a_5(t)\|v\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}, \qquad (1.144)$$

$$\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u(t,x),v(t,x))\right\|_{L_2(o,\ell)}\le a_1(t)+a_2(t)\cdot C_0^{\gamma}+a_3(t)C_0+$$

$$+a_4(t)\|v\|^{\gamma}_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}+a_5(t)\|v\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}, \qquad (1.145)$$

$$\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u(t,x),v_1(t,x))-\frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u(t,x),v_2(t,x))\right\|_{L_2(0,\ell)}\le$$

$$\le b(t)\|v_1-v_2\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}, \qquad (1.146)$$

$$\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u(t,x),v(t,x))\right\|_{L_2(o,\ell)}\le$$

$$\le a_1(t)+a_2(t)C_0^{\gamma}+a_3(t)C_0+b(t)\|v\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}, \qquad (1.147)$$

а для каждого $v\in\mathcal{K}$ оператор $\tilde{\mathcal{F}}(u,v)$ действует из $B^{1+i}_{2,T}$ в E_{x^i} непрерывно. Теперь для каждого фиксированного $u\in B^{1+i}_{2,T}$ в пространстве $B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$ рассмотрим оператор $Q_{i,u}$:

$$Q_{i,u}(v)=w+\mathcal{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u,v)\right), \qquad (1.148)$$

где операторы $\mathcal{P}_i$ $(i=0,1,2)$ определены соотношениями (1.24)-(1.26). Так как для каждого фиксированного $u\in B^{1+i}_{2,T}$ оператор $\tilde{\mathcal{F}}(u,v)$ удовлетворяет (относительно v) условиям 2 и 3 теоремы 1.6 (сравн. неравенства (1.147) и (1.146) с неравенствами (1.113) и (1.112)), то, как видно из процесса доказательства теоремы 1.6, для каждого фиксированного $u\in B^{1+i}_{2,T}$ оператор $Q_{i,u}$, определенный соотношением (1.148), имеет в $B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$ единственную неподвижную точку $v\in B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$. Сопоставляя каждому $u\in B^{1+i}_{2,T}$ соответствующую ему единственную неподвижную точку $v\in B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$ оператора $Q_{i,u}$, порождаем некоторый оператор H_i:

$$H_i(u) = v = Q_{i,u}(v) = w + \mathscr{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathscr{F}}(u,v)\right). \qquad (1.149)$$

Пользуясь неравенством (1.149), для любых $u \in B_{2,T}^{1+i}$ и $t \in [0,T]$ имеем:

$$\|H_i(u)\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}} \equiv \|v\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}} \le 2\|w\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + 2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathscr{F}}(u(\tau,x),v(\tau,x))\right\|^2_{L_2(0,\ell)} d\tau \le 2\|w\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} +$$

$$+8\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot\Big\{\|a_1(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \|a_2(t)\|^2_{L_2(0,T)}\cdot C_0^{2\gamma} +$$

$$+\|a_3(t)\|^2_{L_2(0,T)}\cdot C_0^2\Big\} + 8\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot\int_0^t b^2(\tau)\|v\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,\tau}} d\tau.$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана и пользуясь обозначением (1.139), получаем:

$$\|H_i(u)\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \equiv \|v\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le C_1^2 \quad \forall u \in B^{1+i}_{2,T}. \qquad (1.150)$$

С другой стороны, пользуясь неравенством (1.145), для любых $u \in B^{1+i}_{2,T}$ и $t \in [0,T]$ имеем:

$$\|H_i(u)\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}} \equiv \|v\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}} \le 2\|w\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + 2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^i}\widetilde{\mathscr{F}}(u(\tau,x),v(\tau,x))\right\|^2_{L_2(0,\ell)} d\tau \le 2\|w\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + 10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot\left\{\|a_1(t)\|^2_{L_2(0,T)}+\|a_2(t)\|^2_{L_2(0,T)}\cdot C_0^{2\gamma}+\|a_3(t)\|^2_{L_2(0,T)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot C_0^2+\|a_4(t)\|^2_{L_2(0,T)}\cdot\|v\|^{2\gamma}_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\right\}+10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\int_0^t a_5^2(\tau)\|v\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,\tau}}d\tau. \qquad (1.151)$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана и пользуясь обозначениями (1.141), (1.142), для любого $u\in B^{1+i}_{2,T}$ получаем:

$$\|\mathrm{H}_i(u)\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\equiv\|v\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\le(\widetilde{\mathscr{A}}_1+\widetilde{\mathscr{A}}_2\|v\|^{2\gamma}_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}})\widetilde{\mathscr{A}}_3. \qquad (1.152)$$

Из (1.152), пользуясь обозначением (1.140), получаем:

$$\|\mathrm{H}_i(u)\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\equiv\|v\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\le C_2\quad\forall u\in B^{1+i}_{2,T}. \qquad (1.153)$$

Таким образом, из соотношений (1.150) и (1.152) следует, что для любого $u\in B^{1+i}_{2,T}$:

$$\|\mathrm{H}_i(u)\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\equiv\|v\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\le C=\min\{C_1,C_2\}, \qquad (1.154)$$

т.е. оператор H_i отображает всё пространство $B^{1+i}_{2,T}$ в шар $\mathscr{K}\left(\|u\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\le C\right)$ пространства $B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$. Оператор H_i, определенный во всём пространстве $B^{1+i}_{2,T}$, рассмотрим только в шаре $\mathscr{K}^*\left(\|u\|_{B^{1+i}_{2,T}}\le C\right)$ этого пространства. Тогда, в силу неравенства (1.153), для любого $u\in B^{1+i}_{2,T}$ имеем:

$$\|\mathrm{H}_i(u)\|_{B^{1+i}_{2,T}}\le\|\mathrm{H}_i(u)\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\le C, \qquad (1.155)$$

т.е. оператор H_i преобразует шар $\mathscr{K}^*$ в себя. Кроме того, как видно из (1.154):

$$\mathrm{H}_i\mathscr{K}^*\subset\mathscr{K}(\|u\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}\le C)\subset B^{2+i,1+i}_{2,2,T}. \qquad (1.156)$$

Так как, в силу теоремы 1.1, пространство $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ вкладывается в пространство $B_{2.T}^{1+i}$ вполне непрерывно, то из (1.156) следует, что множество $H_i \mathcal{K}^*$ компактно в $B_{2.T}^{1+i}$.

Теперь покажем непрерывность оператора H_i в шаре $\mathcal{K}^*$. Пусть $u_k, u_0 \in \mathcal{K}^*$, $u_k \xrightarrow{B_{2.T}^{1+i}} u_0$ при $k \to \infty$ и $H_i(u_k) = v_k$, $H_i(u_0) = v_0$. Тогда, пользуясь представлением

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u_k(t,x), v_k(t,x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u_0(t,x), v_0(t,x)) =$$

$$= \left[\frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u_k(t,x), v_k(t,x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u_k(t,x), v_0(t,x))\right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u_k(t,x), v_0(t,x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u_0(t,x), v_0(t,x)\right] \quad (1.157)$$

и неравенством (1.145), для $\forall t \in [0,T]$ имеем:

$$\left\|\mathrm{H}_i(u_k) - \mathrm{H}_i(u_0)\right\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} \equiv \left\|v_k - v_0\right\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}} \le \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4} \cdot$$

$$\cdot \int_0^t \left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u_k(\tau,x), v_k(\tau,x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u_0(\tau,x), v_0(\tau,x))\right\|^2_{L_2(0,\ell)} d\tau \le$$

$$\le 2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \left\{\int_0^t \left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u_k(\tau,x), v_k(\tau,x)) -\right.\right.$$

$$\left. - \frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u_k(\tau,x), v_0(\tau,x))\right\|^2_{L_2(0,\ell)} d\tau + \int_0^t \left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u_k(\tau,x), v_0(\tau,x)) -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^i}{\partial x^i}\tilde{\mathcal{F}}(u_0(\tau,x), v_0(\tau,x))\right\|^2_{L_2(0,\ell)} d\tau\right\} \le 2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot\left\{\int_0^t b^2(\tau)\|v_k - v_0\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}}\, d\tau + \left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathcal{F}}(u_k(\tau,x), v_0(\tau,x)) -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathcal{F}}(u_0(\tau,x), v_0(\tau,x))\right\|^2_{L_2(D_T)}\right\}. \qquad (1.158)$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем:

$$\|\mathrm{H}_i(u_k) - \mathrm{H}_i(u_0)\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le 2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathcal{F}}(u_k(\tau,x), v_0(\tau,x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathcal{F}}(u_0(\tau,x), v_0(\tau,x))\right\|^2_{L_2(D_T)}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\|b(t)\|^2_{L_2(0,T)}\right\}. \qquad (1.159)$$

Так как $v_0 = \mathrm{H}_i(u_0) \in \mathcal{K}$ и для каждого фиксированного $v \in \mathcal{K}$ оператор $\widetilde{\mathcal{F}}(u,v)$ действует из $B^{1+i}_{2,T}$ в E_{x^i} непрерывно, то из неравенства (1.159) следует, что оператор H_i действует из шара $\mathcal{K}^*$ пространства $B^{1+i}_{2,T}$ в $B^{1+i,1+i}_{2,2,T}$, а тем более в $B^{1+i}_{2,T}$ непрерывно. Таким образом, оператор H_i вполне непрерывно преобразует шар $\mathcal{K}^* \subset B^{1+i}_{2,T}$ в себя. Следовательно, в силу принципа Шаудера, оператор H_i имеет в шаре $\mathcal{K}^*$ по крайней мере одну неподвижную точку $\widetilde{u}$:

$$B^{2+i,1+i}_{2,2,T} \ni \widetilde{u} = H_i(\widetilde{u}) = w + \mathcal{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{u}(t,x), \widetilde{u}(t,x))\right). \qquad (1.160)$$

Далее, пользуясь неравенством (1.144) (для $u = v = \widetilde{u}$), из соотношения (1.160) получаем, что для любого $t \in [0,T]$:

$$\|\widetilde{u}\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}} \leq 2\|w\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + 2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \int_0^t \left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{u}(\tau,x),\widetilde{u}(\tau,x))\right\|^2_{L_2(0,\ell)} d\tau \leq 2\|w\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} +$$

$$+10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \|a_1(t)\|^2_{L_2(0,T)} + 10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \left[\|a_2(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \|a_4(t)\|^2_{L_2(0,T)}\right] \cdot$$

$$\cdot \|\widetilde{u}\|^{2\gamma}_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + 10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \int_0^t \left[a_3^2(\tau) + a_5^2(\tau)\right]\|\widetilde{u}\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,\tau}} d\tau. \tag{1.161}$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана и пользуясь обозначениями (1.135)-(1.137), получаем:

$$\|\widetilde{u}\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \leq (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2\|\widetilde{u}\|^{2\gamma}_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}})\mathcal{A}_3. \tag{1.162}$$

Из (1.162), в силу обозначения (1.134), имеем:

$$\widetilde{u}(t,x)_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \leq C_0.$$

Так как $\|\widetilde{u}\|_{B^{1+i}_{2,T}} \leq \|\widetilde{u}\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \leq C_0$, то $\widetilde{u} \in \mathcal{K}_0$. Тогда из определения оператора $\widetilde{\mathcal{F}}(u,v)$, т.е. из соотношения (1.143), следует, что

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{u},\widetilde{u}) = \mathcal{F}(\widetilde{u},\widetilde{u}) = \mathcal{F}(\widetilde{u}). \tag{1.163}$$

Таким образом, соотношение (1.160) принимает следующий вид:

$$\widetilde{u} = w + \mathcal{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}(\widetilde{u}(t,x))\right), \tag{1.164}$$

т.е. $\widetilde{u} \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ является неподвижной точкой оператора Q_i, определённого соотношением (1.116).

Далее, легко проверяется, что функция $\widetilde{u}(t.x)$ является: при $i=0$ - обобщённым решением, при $i=1$ - решением почти всюду, а при $i=2$ - классическим решением задачи (1.1)-(1.3). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы 1.7 при $i=0$, как простейший частный случай, вытекает следующее

Следствие 1.3. Пусть

1. Для $i=0$ выполнено условие 2 теоремы 1.4.
2. Оператор $\mathscr{F}$ порожден функцией $F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})$, т.е.

$\mathscr{F}(u(t,x)) = F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))$, причём:

а) функция $F(t,x,u_1,\cdots,u_5)$ определена в области $\mathscr{D}_T \times (-\infty,\infty)^5$, в этой же области удовлетворяет условиям Каратеодори и условию

$$\left|F(t,x,u_1,\cdots,u_5)\right| \le A_1(t,x) + A_2(t,x)(|u_1|+|u_2|) + A_3(t)\sum_{i=3}^{5}|u_i|, \quad (1.165)$$

где $A_1(t,x), A_2(t,x) \in L_2(D_T), \quad A_3(t) \in L_2(0,T)$;

б) в области $\mathscr{D}_T \times \left[-\frac{\pi}{\sqrt{6}}C_0, \frac{\pi}{\sqrt{6}}C_0\right] \times (-\infty,\infty)^4$ выполняется условие:

$$\left|F(t,x,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) - F(t,x,u_1,v_2,u_3,v_4,v_5)\right| \le$$

$$\le B_1(t,x)\left|u_2 - v_2\right| + B_2(t)\left[\left|u_4 - v_4\right| + \left|u_5 - v_5\right|\right], \quad (1.166)$$

где $B_1(t,x) \in L_2(\mathscr{D}_T)$, $B_2(t) \in L_2(0,T)$, а число C_0 определено следующим соотношением:

$$C_0 \equiv \left\{\left[\left\|w(t,x)\right\|^2_{B^{2,1}_{2,2,T}} + \frac{10\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\left\|a_1(t)\right\|^2_{L_2(0,T)}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left[\frac{10\left(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\left(\left\|a_3(t)\right\|^2_{L_2(0,T)} + \left\|a_5(t)\right\|^2_{L_2(0,T)}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

причём

$$a_1(t) = \|A_1(t,x)\|_{L_2(0,\ell)}, \quad a_3(t) = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\|A_2(t,x)\|_{L_2(0,\ell)} + \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} A_3(t),$$

$$a_5(t) = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\|A_2(t,x)\|_{L_2(0,\ell)} + \left(\frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} + \frac{\pi^2}{\ell\sqrt{2\ell}}\right)A_3(t).$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) имеет обобщённое решение.

Доказательство. Для того, чтобы вывести это следствие из теоремы 1.7, достаточно определить оператор $\Phi(u,v)$, фигурирующий в условии 2 теоремы 1.7, следующим образом:

$$\Phi(u(t,x),v(t,x)) = F(t,x,u(t,x),V_t(t,x),u_x(t,x),V_{tx}(t,x),V_{xx}(t,x)). \quad (1.167)$$

Очевидно, что $\forall u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \in B^1_{2,T}$, $v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \in B^{2,1}_{2,2,T}$, $t\in[0,T]$ и $x\in[0,\ell]$:

$$|u(t,x)| \le \sum_{n=1}^{\infty}|u_n(t)| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\right)\cdot\frac{1}{n} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\right)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\|u\|_{B^1_{2,t}}, \quad (1.168)$$

$$\|u_x(t,x)\|_{L_2(0,\ell)} \le \sqrt{\frac{\ell}{2}}\cdot\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(n\cdot u_n(t))^2} \le$$

$$\le \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\right)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}\|u\|_{B^1_{2,t}}, \quad (1.169)$$

$$|v_t(t,x)| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\vartheta'_b(t)| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(n\cdot\vartheta'_n(t))^2} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\|v\|_{B^{2,1}_{2,2,t}}, \quad (1.170)$$

$$\|v_{tx}(t,x)\|_{L_2(0,\ell)} \le \sqrt{\frac{\ell}{2}}\cdot\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(n\vartheta'_b(t))^2} \le$$

$$\le \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot\max_{0\le\tau\le t}|\vartheta'_n(\tau)|\right)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}\|v\|_{B^{2,1}_{2,2,t}}, \quad (1.171)$$

$$\left\|v_{xx}(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} \le \frac{\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{\ell}{2}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|\vartheta_n(\tau)\right|\right)^2} \le \frac{\pi^2}{\ell\sqrt{2\ell}}\left\|v\right\|_{B^{2,1}_{2,2,t}}. \quad (1.172)$$

Тогда, пользуясь неравенством (1.165) и оценками (1.168)-(1.172), $\forall u(t,x)\in B^1_{2,T}$, $\quad v(t,x)\in B^{2,1}_{2,2,T}$ и $t\in[0,T]$ имеем:

$$\left\|\mathcal{F}(u(t,x),v(t,x))\right\|_{L_2(0,\ell)} = \left\|F\left(t,x,u(t,x),v_t(t,x),u_x(t,x),\right.\right.$$

$$\left.\left.v_{tx}(t,x),v_{xx}(t,x)\right)\right\|_{L_2(0,\ell)} \le \left\|\mathcal{A}_1(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} + \left\|\mathcal{A}_2(t,x)u(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} +$$

$$+\left\|\mathcal{A}_2(t,x)v_t(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} + \mathcal{A}_3(t)\Big[\left\|u_x(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} + \left\|v_{tx}(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} +$$

$$+\left\|v_{xx}(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)}\Big] \le \left\|\mathcal{A}_1(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} + \frac{\pi}{\sqrt{6}}\left\|u\right\|_{B^1_{2,t}}\cdot\left\|\mathcal{A}_2(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} +$$

$$+\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left\|v\right\|_{B^{2,1}_{2,2,t}}\cdot\left\|\mathcal{A}_2(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} + \mathcal{A}_3(t)\left[\frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}\left\|u\right\|_{B^1_{2,t}} + \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}\left\|v\right\|_{B^{2,1}_{2,2,t}} +\right.$$

$$\left.+\frac{\pi^2}{\ell\sqrt{2\ell}}\left\|v\right\|_{B^{2,1}_{2,2,t}}\right] = \left\|\mathcal{A}_1(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} + \left[\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left\|\mathcal{A}_2(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} +\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}\mathcal{A}_3(t)\right]\cdot\left\|u\right\|_{B^1_{2,t}} + \left[\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left\|\mathcal{A}_2(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} + \left(\frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} + \frac{\pi^2}{\ell\sqrt{2\ell}}\right)\mathcal{A}_3(t)\right]\cdot$$

$$\cdot\left\|v\right\|_{B^{2,1}_{2,2,t}} = a_1(t) + a_3(t)\cdot\left\|u\right\|_{B^1_{2,t}} + a_5(t)\cdot\left\|v\right\|_{B^{2,1}_{2,2,t}}. \quad (1.173)$$

Следовательно, выполнено для $i=0$ условие $2a$ теоремы 1.7, причём в этом случае $a_2(t)\equiv 0$, $\quad a_4(t)\equiv 0$.

Далее, пользуясь неравенством (1.166), оценкой (1.168) и для $v=v_1-v_2$ оценками (1.170)-(1.172), аналогично (1.173), $\forall u(t,x)\in \mathcal{K}_0\left(\left\|u\right\|_{B^1_{2,T}}\le C_0\right)$, $v_1,v_2\in B^{2,1}_{2,2,T}$ и $t\in[0,T]$ имеем:

$$\left\|\mathcal{F}(u(t,x),v_1(t,x)) - \mathcal{F}(u(t,x),v_2(t,x))\right\|_{L_2(0,\ell)} = \left\|F\left(t,x,u(t,x),v_{1t}(t,x),u_x(t,x),\right.\right.$$

$$\left.v_{1,tx}(t,x),v_{1,xx}(t,x)\right) - F\left(t,x,u(t,x),v_{2,t}(t,x),u_x(t,x),v_{2,tx}(t,x),v_{2,xx}(t,x)\right)\Big\|_{L_2(0,\ell)} \le$$

$$\leq \left\| B_1(t,x)\cdot\left(v_{1,t}(t,x)-v_{2,t}(t,x)\right)\right\|_{L_2(0,\ell)} + B_2(t)\Big[\left\|v_{1,tx}(t,x)-v_{2,tx}(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} +$$

$$+\left\|v_{1,xx}(t,x)-v_{2,xx}(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)}\Big] \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}\left\|v_1-v_2\right\|_{B^{2,1}_{2,2,t}}\cdot\left\|B_1(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)} +$$

$$+B_2(t)\left[\frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}\left\|v_1-v_2\right\|_{B^{2,1}_{2,2,t}} + \frac{\pi^2}{\ell\sqrt{2\ell}}\left\|v_1-v_2\right\|_{B^{2,1}_{2,2,t}}\right] = b(t)\cdot\left\|v_1-v_2\right\|_{B^{2,1}_{2,2,t}},$$

где $b(t)=\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left\|B_1(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)}+\frac{\pi}{\ell\sqrt{2\ell}}(\ell+\pi)\cdot B_2(t)\in L_2(0,T)$.

Следовательно, выполнено для $i=0$ условие 2*б* теоремы 1.7.

Теперь покажем, что при условиях данного следствия выполнено и для $i=0$ условие 2*в* теоремы 1.7. На самом деле, пусть $v(t,x)$ - любая фиксированная функция из $B^{2,1}_{2,2,T}$, $u_n(t,x)$, $u_0(t,x)\in \mathcal{K}_0\left(\|u\|_{B^1_{2,T}}\leq C_0\right)$ и

$$u_n(t,x)\xrightarrow{B^1_{2,T}}u_0(t,x) \text{ при } n\to\infty.$$

Тогда, в силу оценок (1.168), (1.169), $\forall n=0,1,2,\cdots$, $t\in[0,T]$ и $x\in[0,\ell]$ имеем:

$$\left|u_n(t,x)\right|\leq\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left\|u_n\right\|_{B^1_{2,t}}\leq\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left\|u_n\right\|_{B^1_{2,T}}\leq\frac{\pi}{\sqrt{6}}C_0, \qquad (1.174)$$

$$\left\|u_{n,x}(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)}\leq\frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}\left\|u_n\right\|_{B^1_{2,t}}\leq\frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}\left\|u_n\right\|_{B^1_{2,T}}\leq\frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}C_0, \qquad (1.175)$$

$$\left|u_n(t,x)-u_0(t,x)\right|\leq\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left\|u_n-u_0\right\|_{B^1_{2,t}}\leq\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left\|u_n-u_0\right\|_{B^1_{2,T}}, \qquad (1.176)$$

$$\left\|u_{n,x}(t,x)-u_{0,x}(t,x)\right\|_{L_2(0,\ell)}\leq\frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}\left\|u_n-u_0\right\|_{B^1_{2,T}}. \qquad (1.177)$$

Из (1.176) следует, что

$$u_n(t,x)\overset{\mathcal{D}_T}{\rightrightarrows}u_0(t,x) \text{ при } n\to\infty, \qquad (1.178)$$

а из (1.177) следует, что

$$u_{n,x}(t,x)\overset{\mathcal{D}_T}{\rightrightarrows}u_{0,x}(t,x) \text{ при } n\to\infty. \qquad (1.179)$$

Тогда, в силу известных свойств оператора Немыцкого, имеем:

$$F\left(t,x,u_n(t,x),v_t(t,x),u_{n,x}(t,x),v_{tx}(t,x),v_{xx}(t,x)\right)\overset{\mathcal{D}_T}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow F\left(t,x,u_0(t,x),v_t(t,x),u_{0,x}(t,x),v_{tx}(t,x),v_{xx}(t,x)\right) \text{ при } n\to\infty,$$

т.е.

$$\mathcal{F}(u_n(t,x),v(t,x))\overset{\mathcal{D}_T}{\Rightarrow}\mathcal{F}(u_0(t,x),v(t,x)) \text{ при } n\to\infty. \qquad (1.180)$$

Далее, в силу неравенства (1.165), имеем:

$$\left|\mathcal{F}(u_n(t,x),v(t,x))\right| = \left|F\left(t,x,u_n(t,x),v_t(t,x),u_{n,x}(t,x),v_{tx}(t,x),\right.\right.$$

$$\left.\left.v_{xx}(t,x)\right)\right| \le \mathcal{A}_1(t,x)+\mathcal{A}_2(t,x)\cdot\left|u_n(t,x)\right| + \mathcal{A}_2(t,x)\left|v_t(t,x)\right| +$$

$$+\mathcal{A}_3(t)\left|u_{n,x}(t,x)\right| + \mathcal{A}_3(t)\left[\left|v_{tx}(t,x)\right| + \left|v_{xx}(t,x)\right|\right] \le \mathcal{A}_1(t,x)+$$

$$+\frac{\pi}{\sqrt{6}}C_0\cdot\mathcal{A}_2(t,x)+\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left\|v\right\|_{B^{2,1}_{2,2,T}}\cdot\mathcal{A}_2(t,x)+\mathcal{A}_3(t)\left|u_{n,x}(t,x)-\right.$$

$$\left.-u_{0,x}(t,x)\right| + \mathcal{A}_3(t)\left|u_{0,x}(t,x)\right| + \mathcal{A}_3(t)\left[\left|v_{tx}(t,x)\right| + \left|v_{xx}(t,x)\right|\right] =$$

$$= g(t,x)+\mathcal{A}_3(t)\left|u_{n,x}(t,x)-u_{0,x}(t,x)\right|, \qquad (1.181)$$

где

$$g(t,x)=\mathcal{A}_1(t,x)+\frac{\pi}{\sqrt{6}}C_0\mathcal{A}_2(t,x)+\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left\|v\right\|_{B^{2,1}_{2,2,T}}\cdot\mathcal{A}_2(t,x)+$$

$$+\mathcal{A}_3(t)\left|u_{0,x}(t,x)\right|+\mathcal{A}_3(t)\left[\left|v_{tx}(t,x)\right|+\left|v_{xx}(t,x)\right|\right],$$

причём $g(t,x)\in L_2(\mathcal{D}_T)$, ибо, пользуясь оценками (1.174)-(1.180) и (1.171), имеем:

$$\left\|g(t,x)\right\|_{L_2(D_T)} \le \left\|\mathcal{A}_1(t,x)\right\|_{L_2(D_T)}+\frac{\pi}{\sqrt{6}}(C_0+\left\|v\right\|_{B^{2,1}_{2,2,T}})\left\|\mathcal{A}_2(t,x)\right\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+\frac{\pi}{\sqrt{2\ell}}C_0\left\|\mathcal{A}_3(t)\right\|_{L_2(0,T)}+\frac{\pi}{\ell\sqrt{2\ell}}(\ell+\pi)\cdot\left\|v\right\|_{B^{2,1}_{2,2,T}}\cdot\left\|\mathcal{A}_3(t)\right\|_{L_2(0,T)}<+\infty.$$

В силу оценки (1.177) имеем:

$$\left\|\mathcal{A}_3(t)\cdot\left|u_{n,x}(t,x)-u_{0,x}(t,x)\right|\right\|_{L_2(D_T)} \le$$

$$\leq \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} \| u_n - u_0 \|_{B^1_{2,T}} \cdot \| \mathscr{A}_3(t) \|_{L_2(0,T)} \to 0 \text{ при } n \to \infty. \qquad (1.182)$$

Теперь, в силу соотношения (1.182) и соотношения $g(t,x) \in L_2(\mathscr{D}_T)$, из неравенства (1.181) следует, что функции семейства $\left\{\left[\mathscr{F}(u_n(t,x), v(t,x))\right]^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ имеют в $\mathscr{D}_T$ равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Таким образом,

$$\{\mathscr{F}(u_n(t,x), v(t,x)) - \mathscr{F}(u_0(t,x), v(t,x))\}^2 \overset{\mathscr{D}_T}{\Rightarrow} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и функции семейства

$$\{\mathscr{F}(u_n(t,x), v(t,x)) - \mathscr{F}(u_0(t,x), v(t,x))\}^2$$

имеют в $\mathscr{D}_T$ равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Отсюда, в силу теоремы Витали о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, следует, что

$$\|\mathscr{F}(u_n, v) - \mathscr{F}(u_0, v)\|_{L_2(\mathscr{D}_T)} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Это означает, что для каждого фиксированного $v \in B^{2,1}_{2,2,T}$ оператор $\Phi(u,v)$ действует из $\mathscr{K}_0\left(\| u \|_{B^1_{2,T}} \leq C_0\right)$ в $L_2(\mathscr{D}_T)$ непрерывно. Следовательно, для $i = 0$ выполнено условие 2*в* теоремы 1.7. Тогда справедливость утверждения данного следствия следует из теоремы 1.7.

По идее доказательства теоремы 1.7. доказывается следующая

Теорема 1.8. Пусть

1. $i = 0, 1, 2$ и выполнено условие 2 теоремы 1.4.
2. $\mathscr{F}(u) = \mathscr{F}(u,u)$, где:

а) оператор $\mathscr{F}(u,v)$ действует из $B^{1+i}_{2,T} \times B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$ в E_{x^i}, причём для любых $u \in B^{1+i}_{2,T}$, $\quad v \in B^{2+i,1+i}_{2,2,T}$ и $t \in [0,T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u(t,x), v(t,x)) \right\|_{L_2(0,\ell)} \leq a_1(t) + a_2(t) \|u\|_{B^{1+i}_{2,T}} + a_3(t) \|v\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}, (1.183)$$

где $a_i(t) \in L_2(0,T) \quad (i = 1,3)$;

б) для любых $u \in \mathscr{K}_0\left(\|u\|_{B^{1+i}_{2,T}} \leq C_0\right)$ и $v_1, v_2 \in \mathscr{K}_1\left(\|v\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \leq C_0\right)$

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u(t,x), v_1(t,x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u(t,x), v_2(t,x)) \right\|_{L_2(o,\ell)} \le$$

$$\le b(t) \| v_1 - v_2 \|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}}, \qquad (1.184)$$

где $b(t) \in L_2(0,T)$,

$$C_0 \equiv \left\{ \left[2\|w\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + 6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \|a_1(t)\|^2_{L_2(0,T)} \cdot \exp\left[6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \left(\|a_2(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \|a_3(t)\|^2_{L_2(0,T)} \right) \right]\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.185)$$

а функция $w(t,x)$ определена соотношением (1.52);

в) для каждого фиксированного $v \in \mathscr{K}\left(\|v\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le C \right)$ оператор $\mathscr{F}(u,v)$ действует из шара $\mathscr{K}_0$ в E_{x^i} непрерывно, где

$$C \equiv \left\{ \left[2\|w\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} + 6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \left(\|a_1(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \right.\right.\right.$$

$$\left. + C_0^2 \cdot \|a_2(t)\|^2_{L_2(0,T)} \right) \Bigg] \cdot \exp\left[6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \right.$$

$$\left.\left. \cdot \|a_3(t)\|^2_{L_2(0,T)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.186)$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) имеет: при $i = 0$ - обобщённое решение, при $i = 1$ - решение почти всюду, а при $i = 2$ - классическое решение.

Замечание 1.4. Следует отметить, что теоремами 1.7 и 1.8 охватывается и такой достаточно широкий класс случаев, когда операторы $Q_i (i = 0,1,2)$, порожденные правой частью уравнения (1.1) с помощью соотношения $Q_i(u) = w + \mathscr{P}_i\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathscr{F}(u(t,x)) \right)$, в пространстве $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ не являются ни вполне непрерывными, ни удовлетворяющими условию Липшица и не распадающимися на сумму двух операторов, где один из этих операторов вполне непрерывен, а другой – сжатый. Другими словами, теоремами 1.7 и 1.8 охватываются и некоторые те случаи, когда для нахождения в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ неподвижной точки оператора Q_i не применим ни принцип Шаудера, ни метод последовательных приближений (а тем более, принцип сжатых отображений), ни комбинированный принцип М.А.Красносельского и ни принцип ненулевого вращения.

§6. Корректность постановки задачи (1.1)-(1.3).

Теперь изучим корректность постановки задачи (1.1)-(1.3). Задачу (1.1)-(1.3) с данными $\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}$ назовем задачей $\widetilde{\mathscr{A}}$. С помощью неравенства Р.Беллмана доказывается следующая

Теорема 1.9. Пусть

1. $i=0,1,2,$ и выполнено условие 2*а* теоремы 1.4 для функций φ и $\widetilde{\varphi}$ и условие 2*б* теоремы 1.4 для функций ψ и $\widetilde{\psi}$.
2. Операторы $\mathscr{F}$ и $\widetilde{\mathscr{F}}$ действуют из $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ в E_{x^i}, причём для любых $u,v\in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ и $t\in[0,T]$:

$$\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}(u(t,x))-\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}(v(t,x))\right\|_{L_2(0,\ell)}\le c(t)\|u-v\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}},$$

$$c(t)\in L_2(0,T);\quad (1.187)$$

$$\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathscr{F}}(u(t,x))-\frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathscr{F}}(v(t,x))\right\|_{L_2(0,\ell)}\le \widetilde{c}(t)\cdot\|u-v\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}},$$

$$\widetilde{c}(t)\in L_2(0,T).\quad (1.188)$$

3. $$\sup_{u\in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}\left\{\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathscr{F}(u(t,x))-\frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathscr{F}}(u(t,x))\right\|_{L_2(\mathscr{D}_T)}\right\}\equiv\varepsilon<+\infty.(1.189)$$

Тогда для единственных: при $i=0$ обобщённых решений, при $i=1$ решений почти всюду, а при $i=2$ классических решений $u(t,x)$ и $\widetilde{u}(t,x)$, соответственно, задач (1.1)-(1.3) и $\widetilde{\mathscr{A}}$, имеем:

$$\left\|u(t,x)-\widetilde{u}(t,x)\right\|_{B^{2+i,1+i}_{2,2,T}} \le \left\{\left[6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\frac{\ell^3}{\pi^4}\left\|\varphi^{(2+i)}(x)-\widetilde{\varphi}^{(2+i)}(x)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}+\right.\right.$$

$$+6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\frac{\ell\left(\ell^2+\pi^2\alpha\right)^2}{\alpha^2\pi^6}\cdot\left\|\psi^{(1+i)}(x)-\widetilde{\psi}^{(1+i)}(x)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}+$$

$$\left.+6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\varepsilon^2\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\exp\left[6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\left\|c(t)\right\|^2_{L_2(0,T)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.190)$$

Доказательство. Так как из условия 2 данной теоремы следуют условия 2 и 3 теоремы 1.6, то по этой же теореме 1.6 задачи (1.1)-(1.3) и $\widetilde{\mathscr{A}}$ имеют единственные: при $i=0$ обобщённые решения, при $i=1$ решения почти всюду, а при $i=2$ классические решения

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \quad \text{и} \quad \widetilde{u}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{u}_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

соответственно, причём в силу лемм 1.1 и 1.2, $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет: при $i=0$ системе (1.21), при $i=1$ системе (1.21a) и при $i=2$ системе (1.21б), а $\{\widetilde{u}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет тем же системам, в которых нужно вместо φ_n,ψ_n и $\mathscr{F}(u)$ иметь в виду $\widetilde{\varphi}_n,\widetilde{\psi}_n$ и $\widetilde{\mathscr{F}}(\widetilde{u})$ соответственно.

Пользуясь этим фактом, из систем (1.21), (1.21*a*) и (1.21*б*) легко получить, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\left\|u-\widetilde{u}\right\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}} \le 3\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n-\widetilde{\varphi}_n)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,t}}+3\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell^2}{\alpha n^2\pi^2}\cdot\right.$$

$$\cdot\left[1-\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t\right)\right](\psi_n-\widetilde{\psi}_n)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Bigg\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}}+$$

$$+3\Bigg\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^i\cdot\frac{2\ell}{\alpha n^2\pi^2}\int_0^t\int_0^\ell\left[\frac{\partial^i}{\partial\xi^i}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-\frac{\partial^i}{\partial\xi^i}\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{u}(\tau,\xi))\right]\cdot$$

$$\cdot\left[1-\exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right)\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Bigg\|^2_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}}\le$$

$$\le 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{2+i}(\varphi_n-\widetilde{\varphi}_n)\right)^2+3\left[\frac{\ell^2}{\alpha\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^i(\psi_n-\widetilde{\psi}_n)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1+i}(\psi_n-\widetilde{\psi}_n)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2+3\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\frac{\ell\left(\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}(u(\tau,x))-\frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{u}(\tau,x))\right\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau\le 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{2+i}(\varphi_n-\widetilde{\varphi}_n)\right)^2+$$

$$+3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1+i}(\psi_n-\widetilde{\psi}_n)\right)^2\cdot\left(\frac{\ell^2}{\alpha\pi^2}+1\right)^2+6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^t\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}(u(\tau,x))-\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}(\widetilde{u}(\tau,x))\right\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau+\int_0^t\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}(\widetilde{u}(\tau,x))-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{u}(\tau,x))\right\|^2_{L_2(0,\ell)}d\tau\right]\le 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{2+i}(\varphi_n-\widetilde{\varphi}_n)\right)^2+$$

$$+3\frac{\left(\ell^2+\alpha\pi^2\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1+i}\left(\psi_n-\widetilde{\psi}_n\right)\right)^2+6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\cdot$$

$$\cdot\left\|\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathcal{F}(\widetilde{u}(\tau,x))-\frac{\partial^i}{\partial x^i}\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{u}(\tau,x))\right\|^2_{L_2(D_T)}+6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t c^2(\tau)\left\|u-\widetilde{u}\right\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,\tau}}d\tau\le 6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\frac{\ell^3}{\pi^4}\left\|\varphi^{(2+i)}(x)-\widetilde{\varphi}^{(2+i)}(x)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}+$$

$$+6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\frac{\ell\left(\ell^2+\alpha\pi^2\right)^2}{\alpha^2\pi^6}\cdot\left\|\psi^{(1+i)}(x)-\widetilde{\psi}^{(1+i)}(x)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}+$$

$$+6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\varepsilon^2+6\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i}\cdot\frac{\left(\ell\sqrt{2\ell T}+\pi\sqrt{\alpha\ell}\right)^2}{\alpha^2\pi^4}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t c^2(\tau)\left\|u-\widetilde{u}\right\|^2_{B^{2+i,1+i}_{2,2,\tau}}d\tau.$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем справедливость оценки (1.190).

ГЛАВА II

Исследование почти всюду и классического решений одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений третьего порядка

Данная глава посвящена изучению вопросов единственности и существования почти всюду и классического решений следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \dfrac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = F\left(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}\right)(0 \le t \le T, 0 \le x \le \ell), & (2.1) \\ u(0, x) = \varphi(x)(0 \le x \le \ell), \quad u_t(0, x) = \psi(x)\,(0 \le x \le \ell), & (2.2) \\ u(t, 0) = u(t, \ell) = 0 \qquad (0 \le t \le T), & (2.3) \end{cases}$$

где $0 < T$, $\ell < +\infty$; $\alpha > 0$ - фиксированное число; F, φ, ψ - заданные функции, а $u(t,x)$ - искомая функция, причём почти всюду и классические решения задачи (2.1)-(2.3) понимаются в смысле, определяемом в §1 главы I.

Очевидно, что каждое решение почти всюду (и, тем более, классическое решение) задачи (2.1)-(2.3) имеет вид:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

где $u_n(t) = \dfrac{2}{\ell} \displaystyle\int_0^{\ell} u(t, x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx$ - коэффициенты Фурье искомого решения $u(t,x)$ по полной в $L_2(0,\ell)$ системе $\left\{ \sin \dfrac{n\pi}{\ell} x \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Далее, легко видеть, что после формального применения схемы метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра второго рода:

$$u_n(t)=\varphi_n+\frac{\ell^2}{\alpha n^2\pi^2}(1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t})\psi_n+\frac{2\ell}{\alpha n^2\pi^2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\int_0^\ell F\big(\tau,\xi,u(\tau,\xi),u_\tau(\tau,\xi),u_\xi(\tau,\xi),u_{\tau\xi}(\tau,\xi),u_{\xi\xi}(\tau,\xi)\big)\cdot$$

$$\cdot\left(1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\quad (t\in[0,T];n=1,2,\cdots),\qquad (2.4)$$

где

$$\varphi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx,\qquad \psi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell\psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx.$$

Для краткости записи в дальнейшем будем пользоваться следующим обозначением:

$$\mathscr{F}(u(t,x))=F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x)).\ (2.5)$$

Из системы (2.4), пользуясь обозначением (2.5), легко получить, что $\forall n\quad (n=1,2,\cdots)$ и $t\in[0,T]$:

$$u_n'(t)=e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t}\cdot\psi_n+\frac{2}{\ell}\cdot\int_0^t\int_0^\ell\mathscr{F}(u(\tau,\xi))e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau,\quad (2.6)$$

$$u_n''(t)=-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\cdot e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t}\cdot\psi_n-\frac{2\alpha n^2\pi^2}{\ell^3}\cdot\int_0^t\int_0^\ell\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\cdot e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau+\frac{2}{\ell}\cdot\int_0^\ell\mathscr{F}(u(t,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi.\qquad (2.7)$$

Кроме того, в данной главе будем пользоваться леммой 1.2, пространствами $B^{\alpha_0,\cdots,\alpha_s}_{\beta_0,\cdots,\beta_s,T}$, теоремой 1.1 и обозначениями

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\cdots,\alpha_s}_{\beta_0,\cdots,\beta_s,t}}=\sum_{i=0}^{s}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|u_n^{(i)}(\tau)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}},\quad t\in[0,T].\qquad (2.8)$$

§1. Единственность решений задачи (2.1)-(2.3).

В этом параграфе доказывается следующая теорема о единственности (в целом) почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3).

Теорема 2.1. Пусть

1. Функция $F(t,x,u_1,\cdots,u_5)$ непрерывна по совокупности своих переменных в замкнутой области $[0,T]\times[0,\ell]\times(-\infty,\infty)^5$.
2. Для каждого $R>0$ и $\tau\in[0,T)$ существует такое $\delta_R(\tau)$ $\left(0<\delta_R(\tau)\le T-\tau\right)$, что в области $(\tau,\tau+\delta_R(\tau))\times(0,\ell)\times(-R,R)^5$

$$|F(t,x,u_1,\cdots,u_5)-F(t,x,\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_5)|\le\sum_{i=1}^{5}a_{i,R,\tau}(t)\cdot|u_i-\tilde{u}_i|, \quad (2.9)$$

где

$$(t-\tau)^{\frac{3}{2}}\cdot a_{1,R,\tau}(t),(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\cdot a_{2,R,\tau}(t),(t-\tau)\cdot a_{3,R,\tau}(t),$$

$$a_{4,R,\tau}(t),(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\cdot a_{5,R,\tau}(t)\in L_2\left(\tau,\tau+\delta_R(\tau)\right).$$

Тогда задача (2.1)-(2.3) не может иметь более одного решения почти всюду (и, тем более, классического решения).

Доказательство. Пусть $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$ и

$v(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{v}_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$ - два любых решения почти всюду задачи (2.1)-(2.3). В силу леммы 1.2 из главы I, каждая из последовательностей $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\mathrm{v}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет на $[0,T]$ системе (2.4), причём очевидно, что для $\{\mathrm{v}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ в правой части (2.4) везде вместо $u(\tau,\xi)$ нужно иметь в виду $\mathrm{v}(\tau,\xi)$. Тогда из систем (2.4) и (2.6), пользуясь обозначениями (2.5) и (2.8), оценками

$$1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}\le 1,\ n^2\cdot\int_0^t e^{-\frac{2\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}d\tau\le\frac{\ell^2}{2\alpha\pi^2} \quad (2.10)$$

(где $0\le\tau\le t$) и тождеством Парсеваля, легко получить, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u-\text{v}\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}} \le 2\left\{\|u-\text{v}\|^2_{B^2_{2,t}} + \|u_t-\text{v}_t\|^2_{B^1_{2,t}}\right\} \le 2\cdot\frac{\ell}{\alpha\pi^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}t+1\right)\cdot\int_0^t\int_0^\ell\{\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-\mathcal{F}(\text{v}(\tau,\xi))\}^2 d\xi d\tau. \quad (2.11)$$

Так как $\mathcal{F}(u(t,x)),\mathcal{F}(\text{v}(t,x))\in L_2(\mathcal{D}_T)$, то из (2.11) следует, что $u-\text{v}\in B^{2,1}_{2,2,T}$. Очевидно, что $\|u-\text{v}\|_{B^{2,1}_{2,2,0}}=0$. Тогда естественно ввести обозначение:

$$t_0 \equiv \max\left\{t\in[0,T]: \|u-\text{v}\|_{B^{2,1}_{2,2,t}}=0\right\}.$$

Очевидно, что $0\le t_0\le T$, $\forall n$ $(n=1,2,\cdots)$ и $t\in[0,t_0]$ $u_n(t)=\text{v}_n(t), u_n'(t)=\text{v}_n'(t)$, и, следовательно, $\forall t\in[0,t_0]$ и $x\in[0,\ell]$ $u(t,x)=\text{v}(t,x)$. Таким образом:

$$\forall t\in[0,t_0],\ x\in[0,\ell]\quad \mathcal{F}(u(t,x))-\mathcal{F}(\text{v}(t,x))=0. \quad (2.12)$$

Далее, очевидно, что существует такое число R $(0<R<+\infty)$, что всюду в $\mathcal{D}_T$:

$$\left.\begin{aligned} -R < u(t,x), u_t(t,x), u_x(t,x), u_{tx}(t,x), u_{xx}(t,x) < R,\\ -R < \text{v}(t,x), \text{v}_t(t,x), \text{v}_x(t,x), \text{v}_{tx}(t,x), \text{v}_{xx}(t,x) < R.\end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

Теперь предположим, что $0\le t_0<T$. Тогда пользуясь соотношением (2.12) и последовательно оценками

$$\left[1-\exp\left\{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right\}\right]^2 \le \left[\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right]^2,$$

$$\left[1-\exp\left\{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right\}\right] \le \frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau),$$

$$1-\exp\left\{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right\}\le 1,$$

$$\exp\left\{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right\}\le 1,$$

$$\int_0^t \exp\left\{-\frac{2\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right\}d\tau \le \frac{\ell^2}{2\alpha n^2\pi^2}$$

(для $\tau\le t$), из ситем (2.4) и (2.6), аналогично (2.11), легко получить, что $\forall t\in(t_0 T]$:

$$\|u-\text{v}\|^2_{B^0_{2,t}} \le \frac{2}{\ell}\cdot\frac{(t-t_0)^3}{3}\cdot\int_{t_0}^t\int_0^\ell\{\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-\mathcal{F}(\text{v}(\tau,\xi))\}^2 d\xi d\tau, \quad (2.14)$$

$$\|u-\text{v}\|^2_{B^1_{2,t}} \le \frac{2}{\ell}\cdot\frac{\ell}{\alpha\pi^2}\cdot\frac{(t-t_0)^2}{2}\cdot\int_{t_0}^t\int_0^\ell\{\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-\mathcal{F}(\text{v}(\tau,\xi))\}^2 d\xi d\tau, \quad (2.15)$$

$$\|u-\text{v}\|^2_{B^2_{2,t}} \le \frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{\alpha\pi^2}\right)^2\cdot(t-t_0)\cdot\int_{t_0}^t\int_0^\ell\{\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-\mathcal{F}(\text{v}(\tau,\xi))\}^2 d\xi d\tau, \quad (2.16)$$

$$\|u_t-\text{v}_t\|^2_{B^0_{2,t}} \le \frac{2}{\ell}\cdot(t-t_0)\cdot\int_{t_0}^t\int_0^\ell\{\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-\mathcal{F}(\text{v}(\tau,\xi))\}^2 d\xi d\tau, \quad (2.17)$$

$$\|u_t-\text{v}_t\|^2_{B^1_{2,t}} \le \frac{2}{\ell}\cdot\frac{\ell^2}{2\alpha\pi^2}\cdot\int_{t_0}^t\int_0^\ell\{\mathcal{F}(u(\tau,\xi))-\mathcal{F}(\text{v}(\tau,\xi))\}^2 d\xi d\tau. \quad (2.18)$$

Из неравенств (2.14)-(2.18) следует, что $\forall\varepsilon$ $(0<\varepsilon\le\delta_R(t_0)\le \le T+\delta_R(t_0)$; а число R удовлетворяет условиям (2.13)):

$$\sup_{t\in(t_0,t_0+\varepsilon)}\left\{(t-t_0)^{-3}\cdot\|u-\text{v}\|^2_{B^0_{2,t}}\right\}\equiv A_{1,\varepsilon}<+\infty,$$

$$\sup_{t\in(t_0,t_0+\varepsilon)}\left\{(t-t_0)^{-2}\cdot\|u-\text{v}\|^2_{B^1_{2,t}}\right\}\equiv A_{2,\varepsilon}<+\infty,$$

$$\sup_{t\in(t_0,t_0+\varepsilon)}\left\{(t-t_0)^{-1}\cdot\|u-\text{v}\|^2_{B^2_{2,t}}\right\}\equiv A_{3,\varepsilon}<+\infty,$$

$$\sup_{t\in(t_0,t_0+\varepsilon)}\left\{(t-t_0)^{-1}\cdot\left\|u_t-\mathrm{v}_t\right\|^2_{B^0_{2,t}}\right\}\equiv A_{4,\varepsilon}<+\infty,$$

$$\sup_{t\in(t_0,t_0+\varepsilon)}\left\{\left\|u_t-\mathrm{v}_t\right\|^2_{B^1_{2,t}}\right\}\equiv A_{5,\varepsilon}<+\infty,$$

$$\sum_{i=1}^{5}A_{i,\varepsilon}\le C_0\cdot\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\int_0^{\ell}\left\{\mathscr{F}(u(\tau,\xi))-\mathscr{F}(\mathrm{v}(\tau,\xi))\right\}^2d\xi d\tau, \tag{2.19}$$

где

$$C_0=\frac{2}{\ell}\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell^2}{\alpha\pi^2}+\left(\frac{\ell^2}{\alpha\pi^2}\right)^2+1+\frac{\ell^2}{2\alpha\pi^2}\right\}.$$

Из (2.19), пользуясь для $\tau=t_0$ неравенством (2.9), получаем:

$$\sum_{i=1}^{5}A_{i,\varepsilon}\le 5C_0\cdot\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\left\{a^2_{1,R,t_0}(\tau)\cdot\int_0^{\ell}\left[u(\tau,\xi)-\mathrm{v}(\tau,\xi)\right]^2d\xi+\right.$$

$$+a^2_{2,R,t_0}(\tau)\cdot\int_0^{\ell}\left[u_\tau(\tau,\xi)-\mathrm{v}_\tau(\tau,\xi)\right]^2d\xi+a^2_{3,R,t_0}(\tau)\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\ell}\left[u_\xi(\tau,\xi)-\mathrm{v}_\xi(\tau,\xi)\right]^2d\xi+a^2_{4,R,t_0}(\tau)\cdot\int_0^{\ell}\left[u_{\tau\xi}(\tau,\xi)-\mathrm{v}_{\tau\xi}(\tau,\xi)\right]^2d\xi+$$

$$\left.+a^2_{5,R,t_0}(\tau)\cdot\int_0^{\ell}\left[u_{\xi\xi}(\tau,\xi)-\mathrm{v}_{\xi\xi}(\tau,\xi)\right]^2d\xi\right\}d\tau\le$$

$$\le 5C_0\cdot\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\left\{a^2_{1,R,t_0}(\tau)\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\left\|u-\mathrm{v}\right\|^2_{B^0_{2,\tau}}+a^2_{2,R_0,t_0}(\tau)\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\left\|u_t-\mathrm{v}_t\right\|^2_{B^0_{2,\tau}}+\right.$$

$$+a^2_{3,R_0,t_0}(\tau)\cdot\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\cdot\frac{\ell}{2}\left\|u-\mathrm{v}\right\|^2_{B^1_{2,\tau}}+a^2_{4,R_0,t_0}(\tau)\cdot\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\cdot\frac{\ell}{2}\left\|u_t-\mathrm{v}_t\right\|^2_{B^1_{2,\tau}}+$$

$$\left.+a^2_{5,R_0,t_0}(\tau)\cdot\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4\cdot\frac{\ell}{2}\left\|u-\mathrm{v}\right\|^2_{B^2_{2,\tau}}\right\}d\tau\le 5C_0\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\left\{(\tau-t_0)^3\cdot\right.$$

$$
\cdot a^2_{1,R_0,t_0}(\tau)\cdot \mathcal{A}_{1,\varepsilon} + (\tau - t_0)\cdot a^2_{2,R_0,t_0}(\tau)\cdot \mathcal{A}_{4,\varepsilon} + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cdot (\tau - t_0)^2 \cdot
$$

$$
\cdot a^2_{3,R_0,t_0}(\tau)\cdot \mathcal{A}_{2,\varepsilon} + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cdot a^2_{4,R_0,t_0}(\tau)\cdot \mathcal{A}_{5,\varepsilon} + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \cdot (\tau - t_0)\cdot
$$

$$
\left.\cdot a^2_{5,R_0,t_0}(\tau)\cdot \mathcal{A}_{3,\varepsilon} \quad \right\} d\tau \le \sum_{i=1}^{5} \mathcal{A}_{i,\varepsilon} \cdot \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} b_{R,t_0}(\tau)\, d\tau, \tag{2.20}
$$

где

$$
b_{R,t_0}(\tau) \equiv 5C_0 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \Big\{ (\tau - t_0)^3 \cdot a^2_{1,R,t_0}(\tau) + (\tau - t_0)\cdot a^2_{2,R,t_0(\tau)} +
$$

$$
+ \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cdot (\tau - t_0)^2 \cdot a^2_{3,R,t_0}(\tau) + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cdot a^2_{4,R,t_0}(\tau) + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \cdot (\tau - t_0)\cdot
$$

$$
\cdot a^2_{5,R,t_0(\tau)} \quad \Big\}.
$$

Так как $b_{R,t_0}(\tau) \in L(t_0, t_0 + \delta_R(t_0))$, то можно выбрать такое $\varepsilon = \varepsilon_0 (0 < \varepsilon_0 \le \delta_R(t_0))$, что $\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon_0} b_{R,t_0}(\tau)\, d\tau < 1$. Тогда из неравенства (2.20) получим, что

$$
\sum_{i=1}^{5} \mathcal{A}_{i,\varepsilon_0} = 0.
$$

Следовательно, $\mathcal{A}_{1,\varepsilon_0} = \cdots = \mathcal{A}_{5,\varepsilon_0} = 0$. Отсюда, в частности, следует, что $\|u - \mathrm{v}\|_{B^2_{2,t_0+\varepsilon_0}} = 0$ и $\|u_t - \mathrm{v}_t\|_{B^1_{2,t_0+\varepsilon_0}} = 0$, и, следовательно, $\|u - \mathrm{v}\|_{B^{2,1}_{2,2,t_0+\varepsilon_0}}$. А это, в силу положительности числа ε_0, противоречит определению числа t_0. Полученное противоречие показывает, что предположение $0 \le t_0 < T$ было неверно, т.е. должно быть $t_0 = T$, т.е. $\|u - \mathrm{v}\|_{B^{2,1}_{2,2,T}} = 0$. А отсюда следует, что всюду в $\mathcal{D}_T$ $u(t,x) \equiv \mathrm{v}(t,x)$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Для выполнения условия 2 теоремы 2.1 достаточно, чтобы для каждого $R > 0$ в области $(0,T)\times(0,\ell)\times(-R,R)^5$ выполнялось условие

$$\left| F(t,x,u_1,\cdots,u_5) - F\left(t,x,\widetilde{u}_1,\cdots,\widetilde{u}_5\right) \right| \le \sum_{i=1}^{5} a_{i,R}(t)\cdot\left|u_i - \widetilde{u}_i\right|,$$

где для каждого $\tau \in [0,T)$ существует такое $\delta_R(\tau)$ $(0 < \delta_R(\tau) \le$ $\le T-\tau)$, что $(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\cdot a_{1,R}(t),(t-\tau)^{\frac{1}{2}}a_{2,R}(t)$, $(t-\tau)a_{3,R}(t)$, $a_{4,R}(t)$, $(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\cdot a_{5,R}(t)\in L_2(\tau,\tau+\delta_R(\tau))$.

Отсюда видно, что коэффициенты Липшица $a_{1,R}(t),\cdots$, $a_{5,R}(t)$ в отдельных точках (даже в счётном числе точек) множества $(0,T]$ слева могут иметь сколь угодно сильные особенности, а в отдельных точках (даже в счётном числе точек) множества $[0,T)$ могут иметь справа степенные особенности соответственно порядка $2-\varepsilon, 1-\varepsilon, \dfrac{3}{2}-\varepsilon, \dfrac{1}{2}-\varepsilon$ и $1-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - сколь угодно малое число.

§2. Существование в малом почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3).

В этом параграфе комбинированием метода последовательных приближений с принципом Шаудера доказаны теоремы существования в малом (т.е. справедливые при достаточно малых значениях T) почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3).

Теорема 2.2. Пусть

1. Функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,\ell]$, $\varphi'''(x)\in L_2(0,\ell)$ и $\varphi(0)=\varphi(\ell)=\varphi''(0)=\varphi''(\ell)=0$;

   функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,\ell]$, $\psi''(x)\in L_2(0,\ell)$ и $\psi(0)=\psi(\ell)=0$.

2. *а*) Функция $F(t,\xi_1,\cdots,\xi_6)$ непрерывна в замкнутой области $\mathscr{D}_T\times(-\infty,\infty)^5$ вместе с производными $F_{\xi_i}(t,\xi_1,\cdots;\xi_6)$ $(i=\overline{1,6})$;

б) $\forall t\in[0,T]$ и $\xi_4,\xi_5\in(-\infty,\infty)$

$$F(t,0,0,0,\xi_4,\xi_5,0)=F(t,\ell,0,0,\xi_4,\xi_5,0)=0.$$

Тогда существует в малом единственное в целом решение почти всюду задачи (2.1)-(2.3).

Доказательство. Для каждого фиксированного $u\in B^{2,1}_{1,1,T}$ рассмотрим в $B^{3,2}_{2,2,T}$ следующий оператор Q_u:

$$Q_u(\mathrm{v})=Z+\mathscr{P}(\mathscr{F}(u,\mathrm{v})), \tag{2.21}$$

где

$$\mathrm{Z}(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varphi_n+\frac{\ell^2}{\alpha n^2\pi^2}\left(1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t}\right)\psi_n\right\}\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \tag{2.22}$$

$$\mathscr{P}(w(t,x))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\ell^2}{\alpha n^3\pi^3}\cdot\int_0^t\int_0^\ell w(\tau,\xi)\left(1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}\right)\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(u(t,x),\mathrm{v}(t,x))&=F_{\xi_1}(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))+\\
&+F_{\xi_2}(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))\cdot u_x(t,x)+\\
&+F_{\xi_3}(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))\cdot u_{tx}(t,x)+\\
&+F_{\xi_4}(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))\cdot u_{xx}(t,x)+\\
&+F_{\xi_5}(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))\cdot \mathrm{v}_{txx}(t,x)+\\
&+F_{\xi_6}(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))\cdot \mathrm{v}_{xxx}(t,x),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

причём $\xi_1,\cdots,\xi_6$ обозначения соответствующих аргументов функции $F(t,\xi_1,\cdots,\xi_6)$.

Очевидно, что $\forall u(t,x)\in B^{3,2}_{2.2.T}$:

$$\mathscr{F}\left(u(t,x),u(t,x)\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{F\left(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x)\right)\right\}. \quad (2.25)$$

Из условия 1 данной теоремы следует, что $Z(t,x)\in B^{3,2}_{2,2,T}$, ибо

$$\left\|Z(t,x)\right\|_{B^{3,2}_{2,2,T}}\leq\left\{2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\varphi_n\right)^2+\frac{\ell^4}{\alpha^2\pi^4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\psi_n\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\psi_n\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq C\left\{\left\|\varphi'''(x)\right\|_{L_2(0,\ell)}+\left\|\psi''(x)\right\|_{L_2(0,\ell)}\right\}<+\infty.$$

Далее, совершенно аналогично неравенству (2.11), для любых $u(t,x)\in B^{2,1}_{1,1,T}$ и $v(t,x)\in B^{3,2}_{2,2,T}$ имеем:

$$\left\|\mathscr{P}\left(\mathscr{F}\left(u(t,x),v(t,x)\right)\right)\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}}\leq 2\cdot\frac{\ell}{\alpha\pi^2}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\int_0^T\int_0^\ell\left\{\mathscr{F}\left(u(\tau,\xi),v(\tau,\xi)\right)\right\}^2d\xi d\tau<+\infty, \quad (2.26)$$

причём справедливость соотношения $\mathscr{F}\left(u(t,x),v(t,x)\right)\in L_2\left(\mathscr{D}_T\right)$ следует из того, что:

$$\forall u(t,x)\in B^{2,1}_{1,1,T}\quad \partial^s/\partial t^i\,\partial x^{s-i}u(t,x)\in C\left(\mathscr{D}_T\right)\ \left(s=\overline{0,2};i=0,1\right), \quad (2.27)$$

$$\forall v(t,x)\in B^{3,2}_{2,2,T}\quad \left\|\partial^3/\partial t^i\,\partial x^{3-i}v(t,x)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\in C[0,T]\ (i=0,1). \quad (2.28)$$

Таким образом, для каждого фиксированного $u\in B^{2,1}_{1,1,T}$ оператор Q_u, формально определённый соотношениями (2.21)-(2.24), действительно определён в пространстве $B^{3,2}_{2,2,T}$ и действует в нём.

Теперь, при любом фиксированном $u\in B^{2,1}_{1,1,T}$, аналогично (2.26), $\forall v_1,v_2\in B^{3,2}_{2,2,T}$ и $t\in[0,T]$ имеем:

$$\left\|Q_u(\mathrm{v}_1)-Q_u(\mathrm{v}_2)\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}=\left\|\mathscr{I}\left(\mathscr{F}(u,\mathrm{v}_1)-\mathscr{F}(u,\mathrm{v}_2)\right)\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\leq\frac{2\ell^3}{\alpha\pi^4}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\int_0^\ell\left\{\mathscr{F}(u(\tau,\xi),\mathrm{v}_1(\tau,\xi))-\mathscr{F}(u(\tau,\xi),\mathrm{v}_2(\tau,\xi))\right\}^2 d\xi\, d\tau. \qquad (2.29)$$

Из (2.29), пользуясь соотношениями

$$\forall u\in B^{2,1}_{1,1,T}\ \left\|\partial^s/\partial t^i\partial x^{s-i}\,u(t,x)\right\|_{C(D_T)}\leq C\cdot\|u\|_{B^{2,1}_{1,1,T}}\ \left(s=\overline{0,2};\,i=0,1\right),\quad (2.30)$$

$$\forall \mathrm{v}\in B^{3,2}_{2,2,T}\ \int_0^\ell\left\{\partial^3/\partial\tau^i\partial\xi^{3-i}\mathrm{v}(\tau,\xi)\right\}^2 d\xi\leq C\cdot\|\mathrm{v}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}}\ \left(i=0,1\right),\qquad (2.31)$$

получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\left\|Q_u(\mathrm{v}_1)-Q_u(\mathrm{v}_2)\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\leq C_u\cdot\int_0^t\|\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}}\,d\tau,\qquad (2.32)$$

где $C_u>0$ - некоторая постоянная, не зависящая от $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ и $t\in[0,T]$.

Повторно пользуясь неравенством (2.32), получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\left\|Q_u^2(\mathrm{v}_1)-Q_u^2(\mathrm{v}_2)\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}=\left\|Q_u(Q_u(\mathrm{v}_1))-Q_u(Q_u(\mathrm{v}_2))\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\leq C_u\cdot\int_0^t\|Q_u(\mathrm{v}_1)-$$

$$-Q_u(\mathrm{v}_2)\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}}\,d\tau\leq C_u^2\cdot\int_0^t\left\{\int_0^\tau\|\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\sigma}}\,d\sigma\right\}d\tau\leq$$

$$\leq C_u^2\cdot\int_0^t\tau\cdot\|\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}}\,d\tau,$$

$$\left\|Q_u^3(\mathrm{v}_1)-Q_u^3(\mathrm{v}_2)\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} \le C_u \cdot \int_0^t \left\|Q_u^2(\mathrm{v}_1)-Q_u^2(\mathrm{v}_2)\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}} d\tau \le$$

$$\le C_u^3 \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^\tau \sigma \cdot \left\|\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\sigma}} d\sigma \right\} d\tau \le C_u^3 \cdot \int_0^t \left\{ \left\|\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}} \right.$$

$$\left. \cdot \int_0^\tau \sigma \, d\sigma \right\} d\tau = C_u^3 \cdot \int_0^t \frac{\tau^2}{2} \cdot \left\|\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}} d\tau,$$

....

$$\left\|Q_u^k(\mathrm{v}_1)-Q_u^k(\mathrm{v}_2)\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} \le C_u^k \cdot \int_0^t \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} \left\|\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}} d\tau \le$$

$$\le C_u^k \cdot \left\|\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} \cdot \int_0^t \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} d\tau = C_u^k \cdot \frac{t^k}{k!} \cdot$$

$$\cdot \left\|\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} \le \frac{(C_u \cdot T)^k}{k!} \cdot \left\|\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2\right\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}}.$$

Таким образом, при любом фиксированном $u \in B^{2,1}_{1,1,T}$, $\forall \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in B^{3,2}_{2,2,T}$ и k $(k = 1,2,\cdots)$:

$$\left\|Q_u^k(\mathrm{v}_1)-Q_u^k(\mathrm{v}_2)\right\|_{B^{3,2}_{2,2,T}} \le \frac{(C_u \cdot T)^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{k!}} \cdot \left\|\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2\right\|_{B^{3,2}_{2,2,T}}. \tag{2.33}$$

Из (2.33) видно, что при любом фиксированном $u \in B^{2,1}_{1,1,T}$ оператор Q_u, действующий в пространстве $B^{3,2}_{2,2,T}$, удовлетворяет в нём условию Липшица, а его некоторая итерация (даже начиная с некоторого номера, зависящего от u, все итерации) является в $B^{3,2}_{2,2,T}$ сжатым. Следовательно, в силу обобщённого принципа сжатых отображений, оператор Q_u имеет в $B^{3,2}_{2,2,T}$ единственную неподвижную точку v:

$$\mathrm{v} = \mathrm{Z} + \mathscr{P}\left(\mathscr{F}(u, \mathrm{v})\right). \tag{2.34}$$

Таким образом, для каждого фиксированного $u \in B^{2,1}_{1,1,T}$ уравнение (относительно v) (2.34) имеет в $B^{3,2}_{2,2,T}$ единственное решение v. Сопоставив каждому $u \in B^{2,1}_{1,1,T}$ единственное решение $\mathrm{v} \in B^{3,2}_{2,2,T}$ уравнения (2.34), получаем некоторый оператор H:

$$H(u) = \mathrm{v} = \mathrm{Z} + \mathscr{P}(\Phi(u, \mathrm{v})), \tag{2.35}$$

действующий из $B^{2,1}_{1,1,T}$ в $B^{3,2}_{2,2,T}$. Так как $B^{3,2}_{2,2,T} \subset B^{2,1}_{1,1,T}$, то оператор H действует в $B^{2,1}_{1,1,T}$. Покажем, что он действует в $B^{2,1}_{1,1,T}$ вполне непрерывно.

Пусть r - любое положительное число, а K_r - замкнутый шар пространства $B^{2,1}_{1,1,T}$ с центром в нуле и радиуса r. Тогда, пользуясь оценками (2.30) и (2.31), аналогично (2.26), легко получить, что $\forall u \in B^{2,1}_{1,1,T}$ и $t \in [0, T]$:

$$\|H(u)\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} = \|\mathrm{v}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} \le 2\|\mathrm{Z}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} + 2\|\mathscr{P}(\Phi(u, \mathrm{v}))\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} \le$$

$$\le 2\|\mathrm{Z}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1\right) \cdot \int_0^t \int_0^\ell \{\Phi(u(\tau,\xi), \mathrm{v}(\tau,\xi))\}^2 d\xi d\tau \le$$

$$\le 2\|\mathrm{Z}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1\right) \cdot \int_0^t \left\{\mathscr{A}_r + B_r \cdot \|\mathrm{v}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}}\right\} d\tau \le$$

$$\le 2\|\mathrm{Z}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1\right) \cdot \mathscr{A}_r \cdot T + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1\right) \cdot B_r \cdot$$

$$\cdot \int_0^t \|\mathrm{v}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}} d\tau, \tag{2.36}$$

где $\mathscr{A}_r > 0,\ B_r > 0 -$ некоторые числа, зависящие от r. Из (2.36), применив неравенство Р.Беллмана, получаем, что $\forall u \in \mathscr{K}_r$:

$$\|H(u)\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} = \|\mathrm{v}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} \le \left\{2\|\mathrm{Z}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1\right) \cdot \mathscr{A}_r \cdot T\right\} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot B_r\cdot T\right\}\equiv C_r^2. \qquad (2.37)$$

Из (2.37) следует, что множество $H\mathcal{K}_r$ ограничено в $B^{3,2}_{2,2,T}$. Покажем, что оно компактно в $B^{2,1}_{1,1,T}$. По определению оператора H:

$$\forall u\in\mathcal{K}_r \quad H(u)=\mathrm{v}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{v}_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

причём:

$$\mathrm{v}_n(t)=\varphi_n+\frac{\ell^2}{\alpha n^2\pi^2}\left(1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t}\right)\psi_n+\frac{2\ell^2}{\alpha n^3\pi^3}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\int_0^\ell \mathcal{G}(u(\tau,\xi),\mathrm{v}(\tau,\xi))\left(1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}\right)\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau. \qquad (2.38)$$

Из (2.38) следует, что $\forall n\ (n=1,2,\cdots)$ и $t\in[0,T]$:

$$\mathrm{v}_n''(t)=-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\cdot e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t}\cdot\psi_n+\frac{2}{n\pi}\int_0^\ell \mathcal{G}(u(t,\xi),\mathrm{v}(t,\xi))\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi-$$

$$-\frac{2\alpha n\pi}{\ell^2}\cdot\int_0^t\int_0^\ell \mathcal{G}(u(\tau,\xi),\mathrm{v}(\tau,\xi))\cdot e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau. \qquad (2.39)$$

Для каждого фиксированного $n\ (n=1,2,\cdots)$ совокупность n-ых компонент всех элементов множества $H\mathcal{K}_r$ (т.е. совокупность всех функций $\mathrm{v}_n(t)$, определяемых формулами (2.38), когда u меняется на множестве $\mathcal{K}_r$) обозначим через $(H\mathcal{K}_r)_n$. Из (2.37) следует, что $\forall \mathrm{v}_n(t)\in(H\mathcal{K}_r)_n$:

$$\|V_n(t)\|_{C[0,T]}\le C_r, \quad \|V_n'(t)\|_{C[0,T]}\le C_r. \qquad (2.40)$$

Далее, пользуясь обозначениями $\mathcal{A}_r$ и B_r, использованными при получении неравенства (2.36), и оценкой (2.37), из (2.39) легко получить, что $\forall \mathrm{v}_n(t) \in (H\mathcal{K}_r)_n$ и $t \in [0,T]$:

$$\|\mathrm{v}_n''(t)\| \le \frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\cdot|\psi_n| + \frac{2}{n\pi}\sqrt{\ell}\cdot\left\{\int_0^{\ell}[\mathcal{G}(u(t,\xi),\mathrm{v}(t,\xi))]^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{2\alpha n\pi}{\ell^2}\cdot\sqrt{\ell}\cdot\int_0^t\left\{\int_0^{\ell}[\mathcal{G}(u(t,\xi),\mathrm{v}(t,\xi))]^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} d\tau \le \frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\cdot|\psi_n| +$$

$$+\frac{2}{n\pi}\cdot\sqrt{\ell}\cdot\left\{\mathcal{A}_r + B_r\cdot\|\mathrm{v}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{2\alpha n\pi}{\ell^2}\cdot\sqrt{\ell}\cdot\int_0^t\left\{\mathcal{A}_r + B_r\cdot\|\mathrm{v}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\right\}^{\frac{1}{2}} d\tau \le$$

$$\le \frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}\cdot|\psi_n| + \frac{2}{n\pi}\cdot\sqrt{\ell}\cdot\left\{\mathcal{A}_r + B_r\cdot C_r^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{2\alpha n\pi}{\ell^2}\cdot\sqrt{\ell}\cdot T\cdot$$

$$\cdot\left\{\mathcal{A}_r + B_r\cdot C_r^2\right\}^{\frac{1}{2}} \equiv d_n(r),$$

и, следовательно:

$$\|\mathrm{v}_n''(t)\|_{C[0,T]} \le d_n(r). \tag{2.41}$$

Из (2.40) и (2.41) следует, что множество $(H\mathcal{K}_r)_n$, как ограниченное в $C^{(2)}[0,T]$ множество, компактно в $C^{(1)}[0,T]$. А из ограниченности в $B^{3,2}_{2,2,T}$ множества $H\mathcal{K}_r$ следует, что для него, рассматриваемого как множество пространства $B^{2,1}_{1,1,T}$, выполнено условие б теоремы 1.1 главы I. Таким образом, последние два факта, в силу теоремы 1.1, обеспечивают компактность множества $H\mathcal{K}_r$ в $B^{2,1}_{1,1,T}$. Этим мы показали, что оператор H действует в пространстве $B^{2,1}_{1,1,T}$ компактно.

Теперь покажем непрерывность оператора H в $B^{2,1}_{1,1,T}$. Пусть $u_0(t,x)$ - любой элемент пространства $B^{2,1}_{1,1,T}$, а $\{u_k(t,x)\}_{k=1}^{\infty}$ - любая последовательность, составленная из элементов $B^{2,1}_{1,1,T}$ и сходящаяся в $B^{2,1}_{1,1,T}$ к $u_0(t,x)$ при $k \to \infty$. Примем обозначения: $H(u_0) = \mathrm{v}_0$ и $H(u_k) = \mathrm{v}_k$ $(k = 1,2,\cdots)$. Очевидно, что

$$\left\| \partial^s / \partial t^i \partial x^{s-i}\, u_k(t,x) \right\|_{C(\mathcal{D}_T)} \le C_0 \left(s = \overline{0,2};\, i = 0,1;\, k = 0,1,2,\cdots \right), \tag{2.42}$$

$$\left\| \partial^s / \partial t^i \partial x^{s-i}\, (u_k(t,x) - u_0(t,x)) \right\|_{C(\mathcal{D}_T)} \to 0 \left(s = \overline{0,2};\, i = 0,1 \right) \text{ при } k \to \infty. \tag{2.43}$$

Пользуясь соотношением (2.42), аналогично (2.39), $\forall k$ $(k = 1,2,...)$ и $t \in [0,T]$ имеем:

$$\|H(u_k) - H(u_0)\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} = \|\mathrm{v}_k - \mathrm{v}_0\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} = \|\mathcal{A}(\mathcal{F}(u_k, \mathrm{v}_k) - \mathcal{F}(u_0, \mathrm{v}_0))\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} \le$$

$$\le \frac{2\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \int_0^t \int_0^\ell \{ \mathcal{F}(u_k(\tau,\xi), \mathrm{v}_k(\tau,\xi)) - \mathcal{F}(u_0(\tau,\xi), \mathrm{v}_0(\tau,\xi)) \}^2 d\xi d\tau \le$$

$$\le \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \left[\int_0^t \int_0^\ell \{ \mathcal{F}(u_k(\tau,\xi), \mathrm{v}_k(\tau,\xi)) - \mathcal{F}(u_k(\tau,\xi), \mathrm{v}_0(\tau,\xi)) \}^2 d\xi d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \int_0^\ell \{ \mathcal{F}(u_k(\tau,\xi), \mathrm{v}_0(\tau,\xi)) - \mathcal{F}(u_0(\tau,\xi), \mathrm{v}_0(\tau,\xi)) \}^2 d\xi d\tau \right] \le$$

$$\le \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \|\mathcal{F}(u_k, \mathrm{v}_0) - \mathcal{F}(u_0, \mathrm{v}_0)\|^2_{L_2(D_T)} +$$

$$+ \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot C \cdot \int_0^t \|\mathrm{v}_k - \mathrm{v}_0\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}} d\tau , \tag{2.44}$$

где C>0 - некоторая постоянная.

Из (2.44), применив неравенство Р.Беллмана, получаем, что $\forall k$ $(k = 1,2,\cdots)$:

$$\|H(u_k) - H(u_0)\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} = \|\mathrm{v}_k - \mathrm{v}_0\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} \le \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot C \cdot T \right\} \cdot$$

$$\cdot\left\|\mathcal{F}(u_k(t,x),\mathrm{v}_0(t,x))-\mathcal{F}(u_0(t,x),\mathrm{v}_0(t,x))\right\|^2_{L_2(\mathcal{D}_T)}. \quad (2.45)$$

Пользуясь соотношением (2.43), определением $\mathcal{F}(u,\mathrm{v})$, т.е. соотношением (2.24), и тем, что $\mathrm{v}_{0,txx}(t,x),\mathrm{v}_{0,xxx}(t,x)\in L_2(\mathcal{D}_T)$, легко показать, что

$$\left\|\mathcal{F}(u_k,\mathrm{v}_0)-\mathcal{F}(u_0,\mathrm{v}_0)\right\|_{L_2(\mathrm{D}_T)}\to 0 \quad при \quad k\to\infty. \quad (2.46)$$

Из (2.45), в силу (2.46), следует, что

$$\left\|H(u_k)-H(u_0)\right\|_{B^{3,2}_{2,2,T}}\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Этим доказано, что оператор H не только непрерывно действует в $B^{2,1}_{1,1,T}$, но и он непрерывно действует из $B^{2,1}_{1,1,T}$ в $B^{3,2}_{2,2,T}$.

Таким образом, доказано, что оператор H действует в пространстве $B^{2,1}_{1,1,T}$ вполне непрерывно.

Наконец, из неравенства (2.37) следует, что $\forall u\in\mathcal{K}_r$:

$$\|H(u)\|^2_{B^{2,1}_{1,1,T}}\le\frac{\pi^2}{6}\cdot\|H(u)\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}}\le\frac{\pi^2}{6}\left\{2\|\mathrm{Z}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}}+\frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot\mathcal{A}_r\cdot T\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot B_r\cdot T\right\}. \quad (2.47)$$

Из (2.47) видно, что для любого достаточно большого фиксированного r (например, для $r^2>\frac{\pi^2}{3}\mathrm{Z}^2_{B^{3,2}_{2,2,T}}$) при достаточно малых значениях T правую часть (2.47) можно сделать $\le r^2$. Таким образом, любой фиксированный замкнутый шар $\mathcal{K}_r$ пространства $B^{2,1}_{1,1,T}$ достаточно большого радиуса r при достаточно малых значениях T преобразуется в себя оператором Н вполне непрерывно. Следовательно, в силу принципа Шаудера, при достаточно малых значениях T оператор H имеет в $B^{2,1}_{1,1,T}$ по крайней мере одну неподвижную точку u:

$$u=\mathrm{Z}+\mathcal{P}(\mathcal{F}(u,u)). \quad (2.48)$$

Так как H действует из $B_{1,1,T}^{2,1}$ в $B_{2,2,T}^{3,2}$ и $H(u)=u$, то $u(t,x)\in B_{2,2,T}^{3,2}$. Тогда для найденной функции $u(t,x)$ справедливо равенство (2.25). Пользуясь равенством (2.25) и обозначением (2.5), равенству (2.48) можно придать следующий вид:

$$u(t,x)=Z(t,x)+\mathscr{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\{\mathscr{F}(u(t,x))\}\right). \tag{2.49}$$

Если принять обозначение $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$, то, очевидно, что равенство (2.49) равносильно следующей системе:

$$u_n(t)=\varphi_n+\frac{\ell^2}{\alpha n^2\pi^2}\left(1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t}\right)\cdot\psi_n+\frac{2\ell^2}{\alpha n^3\pi^3}\cdot\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial\xi}\{\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\}\cdot$$

$$\cdot\left(1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}\right)\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi\,d\xi\,d\tau\quad(t\in[0,T]\;;n=1,2,\cdots). \tag{2.50}$$

Далее, если пользоваться условием 2σ данной теоремы, то (обратным интегрированием по частям по ξ один раз) системе (2.50) можно дать вид (2.4). Таким образом, коэффициенты Фурье $u_n(t)$ найденной неподвижной точки $u(t,x)\in B_{2,2,T}^{3,2}$ оператора H удовлетворяют на [0,T] системе (2.4). Тогда справедливы (2.6) и (2.7). Из структуры пространства $B_{2,2,T}^{3,2}$ следует, что

$$u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x)\in C(\mathscr{D}_T),$$
$$u_{txx}(t,x),\quad u_{xxx}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,\ell)).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\mathscr{F}(u(t,x))\in C(\mathscr{D}_T),\ \frac{\partial}{\partial x}\{\mathscr{F}(u(t,x))\}\in C([0,T];L_2(0,\ell))$$

и, в силу условия $2_б$ данной теоремы,

$$\forall t\in[0,T]\quad \mathscr{F}(u(t,x))\big|_{x=0}=\mathscr{F}(u(t,x))\big|_{x=\ell}=0.$$

Тогда очевидно, что при любом фиксированном $t\in[0,T]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\mathcal{F}(u(t,x))sin\frac{n\pi}{\ell}xdx\right\}\sin\frac{n\pi}{\ell}x=\mathcal{F}(u(t,x))\quad \forall x\in[0,\ell],$$

т.е. всюду в $\mathcal{D}_T$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\mathcal{F}(u(t,\xi))\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi\right\}\sin\frac{n\pi}{\ell}x=\mathcal{F}(u(t,x)). \tag{2.51}$$

Далее, из систем (2.6) и (2.7), пользуясь равенством (2.51), легко получить, что при любом фиксированном $t\in[0,T]$

$$u_{tt}(t,x)=\alpha u_{txx}(t,x)+\mathcal{F}(u(t,x)) \tag{2.52}$$

для почти всех $x\in[0,\ell]$. Следовательно, равенство (2.52) имеет место почти всюду в $\mathcal{D}_T$, т.е. функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (2.1) почти всюду в $\mathcal{D}_T$. Из (2.52) также следует, что

$$u_{tt}(t,x)\in C([0,T];L_2(\mathbf{0},\ell)).$$

Очевидно, что функция $u(t,x)$ удовлетворяет всем условиям (2.2) и (2.3) в обычном смысле. Таким образом, найденная функция $u(t,x)$ является решением почти всюду задачи (2.1)-(2.3).

А из условия 2*a* данной теоремы следует, что функция $F(t,x,u_1,\cdots,u_5)$ удовлетворяет в области $\mathcal{D}_T\times(-\infty,\infty)^5$ локальному условию Липшица по $(u_1,\cdots,u_5)$, причём с постоянными (не зависящими от t и x) коэффициентами Липшица. Тогда, в силу теоремы 2.1, задача (2.1)-(2.3) не может иметь более одного решения почти всюду. Таким образом, теорема доказана.

Замечание 2.2. Следует отметить, что единственное решение почти всюду $u(t,x)$ задачи (2.1)-(2.3) наряду со свойствами (требуемыми по определению) $u_{tt}(t,x),u_{txx}(t,x)\in L_2(\mathcal{D}_T)$ обладает более сильными свойствами:

$$u_{tt}(t,x),u_{txx}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,\ell)).$$

Теорема 2.3. Пусть

1. Функция $\varphi(x)$ трижды непрерывно дифференцируема на

$[0,\ell], \varphi^{IV}(x) \in L_2(0,\ell)$ и $\varphi(0) = \varphi(\ell) = \varphi''(0) = \varphi''(\ell) = 0;$

функция $\psi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,\ell]$, $\psi'''(x) \in L_2(0,\ell)$ и $\psi(0) = \psi(\ell) = \psi''(0) = \psi''(\ell) = 0.$

2. *а*) Функция $F(t,x,u_1,\cdots,u_5)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменным $x,u_1,\cdots,u_5$ в замкнутой области $\mathscr{D}_T \times (-\infty,\infty)$;

б) выполнено условие $2_б$ теоремы 2.2.

Тогда существует в малом единственное в целом классическое решение задачи (2.1)-(2.3).

Доказательство. Теорема доказывается по идее доказательства предыдущей теоремы 2.2. Поэтому укажем лишь схему доказательства данной теоремы. Для каждого фиксированного $u \in B^{3,2}_{1,1,T}$ рассмотрим в $B^{4,3}_{2,2,T}$ следующий оператор Q_u :

$$Q_u(\mathrm{v}) = Z + \mathscr{P}(\mathscr{F}(u,\mathrm{v})),$$

где функция $Z(t,x)$ определена соотношением (2.22),

$$\mathscr{P}(w(t,x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\ell^3}{\alpha n^4 \pi^4} \cdot \int_0^t \int_0^\ell w(\tau,\xi) \cdot \left(1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}\right) \cdot$$

$$\cdot \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau \cdot \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \tag{2.53}$$

а функция $\mathscr{F}(u(t,x),\mathrm{v}(t,x))$ отличается от

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))\} \tag{2.54}$$

лишь тем, что если в развёрнутом выражении (2.54) в двух (всего лишь имеющихся) слагаемых линейные множители $u_{txxx}(t,x)$ и $u_{xxxx}(t,x)$ заменить соответственно множителями $\mathrm{v}_{txxx}(t,x)$ и $\mathrm{v}_{xxxx}(t,x)$, то получим $\mathscr{F}(u(t,x),\mathrm{v}(t,x))$.

Тогда, очевидно, что:

$$\forall u(t,x) \in B^{4,3}_{2,2,T} \quad \mathscr{F}(u(t,x),u(t,x)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{F}(u(t,x)). \tag{2.55}$$

Из условия 1 данной теоремы следует, что $Z(t,x)\in B^{4,3}_{2,2,T}$. Далее, повторив схему доказательства теоремы 2.2 (лишь с той разницей, что везде нужно: вместо $B^{2,1}_{1,1,T}$ брать $B^{3,2}_{1,1,T}$, вместо $B^{3,2}_{2,2,T}$ брать $B^{4,3}_{2,2,T}$, в оценках (2.6) и (2.9) справа добавить множитель $\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2$, вместо $s=0,2$ брать $s=0,3$, а в (2.28) и (2.31) вместо $\partial^3/\partial t^i\partial x^{3-i}$ брать $\partial^4/\partial t^i\partial x^{4-i}$), легко показать, что для каждого фиксированного $u\in B^{3,2}_{1,1,T}$ уравнение

$$\mathrm{v}=Z+\mathscr{P}(\mathscr{\tilde{\Phi}}(u,\mathrm{v}))$$

имеет в $B^{4,3}_{2,2,T}$ единственное решение v. Сопоставив каждому $u\in B^{3,2}_{1,1,T}$ единственное решение $\mathrm{v}\in B^{4,3}_{2,2,T}$ последнего уравнения, получаем некоторый оператор H:

$$H(u)=\mathrm{v}=Z+\mathscr{P}(\mathscr{\tilde{\Phi}}(u,\mathrm{v})),$$

действующий из $B^{3,2}_{1,1,T}$ в $B^{4,3}_{2,2,T}$. Далее, как при доказательстве теоремы 2.2 (с той лишь разницей, что вместо $B^{2,1}_{1,1,T}$ нужно брать $B^{3,2}_{1,1,T}$, а вместо $B^{3,2}_{2,2,T}$ брать $B^{4,3}_{2,2,T}$), показывается, что оператор H действует в пространстве $B^{3,2}_{1,1,T}$ вполне непрерывно и при достаточно малых значениях T имеет в $B^{3,2}_{1,1,T}$ по крайней мере одну неподвижную точку $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$, принадлежащую даже пространству $B^{4,3}_{2,2,T}$. Тогда для найденной функции $u(t,x)$ справедливо равенство (2.55). Пользуясь равенством (2.55) и обозначением (2.5), равенству

$$u=H(u)=Z+\mathscr{P}(\mathscr{\tilde{\Phi}}(u,u))$$

можно придать следующий вид:

$$u(t,x)=Z(t,x)+\mathscr{P}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\mathscr{F}(u(t,x))\}\right).$$

Отсюда, по определению оператора $\mathscr{P}$ (см.(2.53)), имеем:

$$u_n(t)=\varphi_n+\frac{\ell^2}{\alpha n^2\pi^2}\left(1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}t}\right)\cdot\psi_n-\frac{2\ell^3}{\alpha n^4\pi^4}\cdot\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\cdot\{\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\}\cdot$$

$$\cdot\left(1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{\ell^2}(t-\tau)}\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi d\xi d\tau \quad (t\in[0,T];n=1,2,\cdots). \quad (2.56)$$

Далее, если пользоваться условием 2_6 данной теоремы, то (обратным интегрированием по частям по ξ два раза) системе (2.56) можно придать вид (2.4). Таким образом, коэффициенты Фурье $u_n(t)$ найденной функции $u(t,x)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (2.4). Тогда справедливы (2.6) и (2.7). Из структуры пространства $B^{4,3}_{2,2,T}$ следует, что

$$u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x),u_{txx}(t,x),$$

$$u_{xxx}(t,x)\in C(\mathscr{D}_T),u_{txxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,\ell)).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\mathscr{F}(u(t,x)),\ \frac{\partial}{\partial x}\{\mathscr{F}(u(t,x))\}\in \mathrm{C}(\mathscr{D}_T),\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\mathscr{F}(u(t,x))\}\in \mathrm{C}([0,\mathrm{T}];L_2(0,\ell))$$

и, в силу условия 2_6 данной теоремы,

$$\forall t\in[0,T]\quad \mathscr{F}(u(t,x))\big|_{x=0}=\mathscr{F}(u(t,x))\big|_{x=\ell}=0.$$

Тогда, пользуясь равенством (2.51) всюду в $\mathscr{D}_T$, из систем (2.6) и (2.7) легко получить, что при любом фиксированном $t\in[0,T]$ равенство (2.52) справедливо для любых $x\in[0,\ell]$, т.е. функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (2.1) всюду в $\mathscr{D}_T$. Из равенства (2.52), в частности, следует, что $u_{tt}(t,x)\in C(\mathscr{D}_T)$. Даже, в силу того, что $u_{txx}(t,x)\in C([0,T];\ L_2(0,\ell))$ и $\frac{\partial}{\partial x}\{\mathscr{F}(u(t,x))\}\in \mathrm{C}(\mathscr{D}_T)$, получаем, что

$$u_{ttx}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,\ell)).$$

Очевидно, что функция $u(t,x)$ удовлетворяет всем условиям (2.2) и (2.3) в обычном смысле. Таким образом, найденная функция $u(t,x)$ является классическим решением задачи (2.1)-(2.3). А единственность классического решения задачи (2.1)-(2.3), как и при доказательстве предыдущей теоремы 2.2, следует из теоремы 2.1. Теорема доказана.

Замечание 2.3. Следует отметить, что найденное единственное классического решение $u(t,x)$ задачи (2.1)-(2.3) обладает и следующими дополнительными свойствами:

$$u_{xxx}(t,x)\in C(\mathscr{D}_T),\, u_{txxx}(t,x),\, u_{xxxx}(t,x),\, u_{ttx}(t,x)\in C([0,T]\,;L_2(0,\ell)).$$

§3. Существование в целом почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3) для слабо нелинейных уравнений.

В этом параграфе, пользуясь локальными (в малом) результатами предыдущего параграфа, методами априорных оценок доказаны следующие нелокальные (в целом) теоремы существования почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3).

Теорема 2.4. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 2.2.
2. В области $\mathscr{D}_T\times(-\infty,\infty)^5$:

$$\left|F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})\right|^{*)}\le a(t,x)+ \\ +b(t,x)\cdot\left(|u|+|u_t|+|u_x|\right)+c(t)\cdot\left(|u_{tx}|+|u_{xx}|\right), \qquad (2.57)$$

где $a(t,x),b(t,x)\in L_2(\mathscr{D}_T)$, $c(t)\in L_2(0,T)$.

---

*) В дальнейшем в некоторых случаях для аргументов функции $F(\xi_1,\cdots,\xi_7)$ мы сознательно будем пользоваться обозначениями $t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}$, чтобы яснее представить себе соответствующий рост каждого (начиная с третьего) аргумента функции F, содержащего в правой части уравнения (2.1) соответствующие функции u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}.

3. Для каждого $R > 0$ в области $\mathscr{D}_T \times [-R, R]^3 \times (-\infty, \infty)^2$:

$$\left|F_x(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})\right| \le a_R(t,x) + b_R(t)\cdot\left(u_{tx}^2 + u_{xx}^2\right),$$
$$\left|F_u(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})\right| \le a_R(t,x) + b_R(t)\cdot\left(u_{tx}^2 + u_{xx}^2\right),$$
$$\left|F_{u_t}(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})\right| \le a_R(t,x) + b_R(t)\cdot\left(\left|u_{tx}\right| + \left|u_{xx}\right|\right),$$
$$\left|F_{u_x}(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})\right| \le a_R(t,x) + b_R(t)\cdot\left(\left|u_{tx}\right| + \left|u_{xx}\right|\right),$$
$$\left|F_{u_{tx}}(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})\right| \le b_R(t),$$
$$\left|F_{u_{xx}}(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})\right| \le b_R(t),$$

где $a_R(t,x) \in L_2(\mathscr{D}_T)$, $\quad b_R(t) \in L_2(0,T)$.

Тогда задача (2.1)-(2.3) имеет единственное решение почти всюду.

Доказательство. По теореме 2.2 существует в малом единственное в целом решение почти всюду задачи (2.1)-(2.3). А для доказательства данной теоремы (как видно из процесса доказательства теоремы 2.2) достаточно установить априорную ограниченность в $B^{3,2}_{2,2,T}$ всевозможных решений почти всюду задачи (2.1)-(2.3), принадлежащих пространству $B^{3,2}_{2,2,T}$. Итак, пусть $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x -$ любое решение почти всюду задачи (2.1)-(2.3), принадлежащее пространству $B^{3,2}_{2,2,T}$. В силу леммы 1.2 из главы I, функции $u_n(t)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (2.4). Тогда из систем (2.4) и (2.6), аналогично неравенству (2.11), получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}} \le 2\|Z\|^2_{B^{2,1}_{2,2,T}} + \frac{4\ell}{\alpha\pi^2}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T + 1\right)\cdot\int_0^t\int_0^\ell \{\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\}^2\,d\xi\,d\tau, \qquad (2.58)$$

где функция $Z(t,x)$ определена соотношением (2.22), а оператор $\mathscr{F}$ определен соотношением (2.5). Пользуясь оценками

$$u^2(t,x) \le \frac{\pi^2}{6}\cdot\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}},\ u_t^2(t,x) \le \frac{\pi^2}{6}\cdot\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}},$$

$$u_x^2(t,x) \le \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{6}\cdot\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}}, \tag{2.59}$$

$$\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx \le \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\cdot\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}},\quad \int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx \le \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4\cdot\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}} \tag{2.60}$$

и неравенством (2.57), из (2.58) получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}} \le 2\|Z\|^2_{B^{2,1}_{2,2,T}} + \frac{24\ell}{\alpha\pi^2}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot\|a(t,x)\|^2_{L_2(D_T)} +$$

$$+\frac{24\ell}{\alpha\pi^2}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot\int_0^t\left\{\frac{\pi^2}{6}\left[2+\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\right]\cdot\int_0^\ell b^2(\tau,\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2+\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4\right]c^2(\tau)\right\}\cdot\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,\tau}}\,d\tau = C_1 + \int_0^t e(\tau)\cdot\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,\tau}}\,d\tau, \tag{2.61}$$

где

$$C_1 \equiv 2\|Z\|^2_{B^{2,1}_{2,2,T}} + \frac{24\ell}{\alpha\pi^2}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot\|a(t,x)\|^2_{L_2(D_T)},$$

$$e(\tau) \equiv \frac{24\ell}{\alpha\pi^2}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot\left\{\frac{\pi^2}{6}\left[2+\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\right]\cdot\int_0^\ell b^2(\tau,\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\cdot\left[1+\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\right]\cdot c^2(\tau)\right\} \in L(0,T).$$

Из (2.61), применив неравенство Р. Беллмана, получаем:

$$\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,T}} \le C_1\cdot\exp\left\{\int_0^T e(\tau)d\tau\right\} \equiv C_2, \tag{2.62}$$

т.е. всевозможные решения почти всюду $u(t,x)\in B^{3,2}_{2,2,T}$ задачи (2.1)-(2.3) априори ограничены в $B^{2,1}_{2,2,T}$.

Из априорной оценки (2.62), в силу оценок (2.59) и (2.60), следует справедливость следующих априорных оценок:

$$\|u(t,x)\|_{C(D_T)}\le R,\|u_t(t,x)\|_{C(D_T)}\le R,\|u_x(t,x)\|_{C(D_T)}\le R\,, \tag{2.63}$$

$$\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx\le C_3,\quad \int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx\le C_3\quad \forall t\in[0,T]. \tag{2.64}$$

Далее, при условиях данной теоремы, очевидно, что система (2.4) равносильна системе (2.50). Тогда из системы (2.50), аналогично(2.36), получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\le 2\|Z\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}}+\frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot\int_0^t\int_0^\ell\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}[\mathscr{F}(u(\tau,\xi))]\right\}^2d\xi d\tau. \tag{2.65}$$

Пользуясь априорными оценками (2.64), для любого $t\in[0,T]$ имеем:

$$\int_0^\ell u_{tx}^4(t,x)dx\le\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{6}\cdot\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\cdot\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx\le C_4\cdot\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}, \tag{2.66}$$

$$\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)\cdot u_{xx}^2(t,x)dx\le\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{6}\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\cdot\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx\le C_4\cdot\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}, \tag{2.67}$$

$$\int_0^\ell u_{xx}^4(t,x)dx\le\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4\cdot\frac{\pi^2}{6}\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\cdot\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx\le C_4\cdot\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}. \tag{2.68}$$

С другой стороны, для любых $t\in[0,T]$ и $x\in[0,\ell]$ имеем:

$$u_{tx}^2(t,x)\le\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{6}\cdot\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}},\ u_{xx}^2(t,x)\le\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4\cdot\frac{\pi^2}{6}\cdot\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}, \tag{2.69}$$

$$\int_0^\ell u_{txx}^2(t,x)dx \le \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \cdot \frac{\ell}{2}\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}, \quad \int_0^\ell u_{xxx}^2(t,x)dx \le \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^6 \cdot \frac{\ell}{2}\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}. \quad (2.70)$$

Теперь, представив себе развернутое выражение

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\{\mathscr{F}(u(\tau,\xi))\} \equiv \frac{\partial}{\partial\xi}\{F(\tau,\xi,u(\tau,\xi),u_\tau(\tau,\xi),u_\xi(\tau,\xi),u_{\tau\xi}(\tau,\xi),u_{\xi\xi}(\tau,\xi))\}.$$

пользуясь априорными оценками (2.63), условием 3 данной теоремы и оценками (2.66)-(2.70), из (2.65) легко получить, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} \le C_5 + \int_0^t C_6(\tau)\cdot\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}} d\tau, \quad (2.71)$$

где $C_5 > 0$ - некоторое постоянное, $0 \le C_6(\tau) \in L(0,T)$.

Из (2.71), применив неравенство Р.Беллмана, получаем справедливость априорной оценки:

$$\|u(t,x)\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} \le C_5 \cdot \exp\left\{\int_0^T C_6(\tau)d\tau\right\} \equiv C_6. \quad (2.72)$$

Этим теорема доказана.

Теорема 2.5. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 2.3.

2. Выполнены условия 2 и 3 теоремы 2.4.

Тогда задача (2.1)-(2.3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. По теореме 2.3 существует в малом единственное в целом классическое решение задачи (2.1)-(2.3). Как видно из процесса доказательства теоремы 2.3, для доказательства данной теоремы 2.5 достаточно установить априорную ограниченность в $B^{4,3}_{2,2,T}$ всевозможных классических решений задачи

(2.1)-(2.3), принадлежащих пространству $B^{4,3}_{2,2,T}$. Пусть $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$ - любое классическое решение задачи (2.1)-(2.3), принадлежащее пространству $B^{4,3}_{2,2,T}$. В силу леммы 1.2 из главы I, функции $u_n(t)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (2.4). Очевидно, что при условиях данной теоремы система (2.4) эквивалентна системе (2.50), а последняя система, в свою очередь, эквивалентна системе (2.56). Тогда из системы (2.56), аналогично (2.65), получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{4,3}_{2,2,t}}\le 2\|Z\|^2_{B^{4,3}_{2,2,T}}+\frac{4\ell^5}{\alpha\pi^6}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot\int_0^t\int_0^\ell\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}[\mathscr{F}(u(\tau,\xi))]\right\}^2 d\xi d\tau.\quad(2.73)$$

Так как каждое классическое решение задачи (2.1)-(2.3) является и её решением почти всюду, то, как видно из процесса доказательства предыдущей теоремы, априорная оценка (2.72) справедлива и для всевозможных классических решений $u(t,x)$ задачи (2.1)-(2.3), принадлежащих пространству $B^{4,3}_{2,2,T}$. Тогда, в силу априорной оценки (2.72), из (2.69) и (2.70) следует справедливость следующих априорных оценок.:

$$\|u_{tx}(t,x)\|_{C(\mathscr{D}_T)}\le C_7,\quad \|u_{xx}(t,x)\|_{C(\mathscr{D}_T)}\le C_7,\quad(2.74)$$

$$\int_0^\ell u^2_{txx}(t,x)dx\le C_7,\quad \int_0^\ell u^2_{xxx}(t,x)dx\le C_7\quad \forall t\in[0,T].\quad(2.75)$$

Пользуясь априорными оценками (2.75), $\forall t\in[0,T]$ имеем:

$$\int_0^\ell u^4_{txx}(t,x)dx\le\left(\frac{\pi^2}{\ell^2}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{6}\cdot\|u\|^2_{B^{4,3}_{2,2,t}}\cdot\int_0^\ell u^2_{txx}(t,x)dx\le C_8\cdot\|u\|^2_{B^{4,3}_{2,2,t}},\quad(2.76)$$

$$\int_0^\ell u^2_{txx}(t,x)\cdot u^2_{xxx}(t,x)dx\le\left(\frac{\pi^2}{\ell^2}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{6}\cdot\|u\|^2_{B^{4,3}_{2,2,t}}\cdot\int_0^\ell u^2_{xxx}(t,x)dx\le C_8\cdot\|u\|^2_{B^{4,3}_{2,2,t}},\quad(2.77)$$

$$\int_0^\ell u_{xxx}^4(t,x)dx \le \left(\frac{\pi^3}{\ell^3}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \|u\|^2_{B^{4,3}_{2,2,t}} \cdot \int_0^\ell u_{xxx}^2(t,x)dx \le C_8 \cdot \|u\|^2_{B^{4,3}_{2,2,t}} . \quad (2.78)$$

С другой стороны, очевидно, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\int_0^\ell u_{txxx}^2(t,x)dx \le \left(\frac{\pi^3}{\ell^3}\right)^2 \cdot \frac{\ell}{2}\|u\|^2_{B^{4,3}_{2,2,t}},\ \int_0^\ell u_{xxxx}^2(t,x)dx \le \left(\frac{\pi^4}{\ell^4}\right)^2 \frac{\ell}{2}\|u\|^2_{B^{4,3}_{2,2,t}} . \quad (2.79)$$

Теперь, представив себе развёрнутое выражение

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\{\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\} \equiv \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\{F(\tau,\xi,u(\tau,\xi),u_\tau(\tau,\xi),u_\xi(\tau,\xi),u_{\tau\xi}(\tau,\xi),u_{\xi\xi}(\tau,\xi))\},$$

имея в виду априорные оценки (2.63) и (2.74), а также пользуясь оценками (2.76)-(2.79), из (2.73) легко получить, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{4,3}_{2,2,t}} \le C_9 + C_{10} \cdot \int_0^t \|u\|^2_{B^{4,3}_{2,2,\tau}} d\tau, \quad (2.80)$$

где $C_9 > 0$ и $C_{10} > 0$ - некоторые постоянные, не зависящие от u и t. Из (2.80), применив неравенство Р.Беллмана, получаем справедливость априорной оценки:

$$\|u(t,x)\|^2_{B^{4,3}_{2,2,T}} \le C_9 \cdot \exp\{C_{10} \cdot T\} \equiv C_{11} . \quad (2.81)$$

Этим теорема доказана.

§4. Существование в целом почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3) для сильно нелинейных уравнений.

В этом параграфе рассматривается следующий специальный вид уравнения (2.1):

$$u_{tt} - \alpha u_{txx} = \sigma'(u_x) \cdot u_{xx} + f(x,u) + F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})$$
$$(0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le \ell) \quad (2.82)$$

и доказываются теоремы существования в целом почти всюду и классического решений задачи (2.82), (2.2), (2.3) для достаточно широкого класса уравнений (2.82), правая часть которых по переменным u, u_t и u_x может иметь при $|u| + |u_t| + |u_x| \to \infty$ рост выше линейного.

Теорема 2.6. Пусть

1. Выполнено условие 1 теоремы 2.2.
2. *а*) Функция $\sigma(y)$ дважды непрерывно дифференцируема на $(-\infty, \infty)$;

   б) $\sigma(0) = 0$ и $\sigma^1(y) \geq 0 \quad \forall y \in (-\infty, \infty)$. (2.83)
3. *а*) Функция $f(x,u)$ непрерывно дифференцируема по совокупности своих переменных в замкнутой области $[0,\ell] \times (-\infty, \infty)$;

   б) $f(0,0) = f(\ell,0) = 0$;

   в) в замкнутой области $[0,\ell] \times (-\infty, \infty)$

$$\int_0^u f(x,\xi)d\xi \equiv g(x,u) \leq C \cdot (1 + u^2) - g_0(u), \tag{2.84}$$

   где $C > 0$ - некоторая постоянная, а функция $g_0(u) \geq 0$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$.
4. *а*) Выполнено условие 2 теоремы 2.2;

   б) в области $\mathscr{D}_T \times (-\infty, \infty)^5$:

$$F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}) \cdot u_t \leq C \cdot \{1 + g_0(u) + u^2 + u_t^2 + u_x^2\} +$$
$$+ \varepsilon_0 \cdot u_{tx}^2, \quad \varepsilon_0 < \alpha, \tag{2.85}$$

   где C>0 – некоторая постоянная, $g_0(u)$ - функция, фигурирующая в (2.84), а $\alpha > 0$ - число, фигурирующее в уравнении (2.82);

   в) $\forall R > 0$ в области $\mathscr{D}_T \times [-R, R] \times (-\infty, \infty)^4$:

$$-F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}) \cdot u_{xx} \leq$$
$$\leq C_R \cdot \{1 + u_t^4 + u_x^4 + u_{tx}^2 + u_{tx}^2 \cdot u_x^2 + u_{xx}^2 + u_{xx}^2 \cdot u_t^2\}, \tag{2.86}$$

   где $C_R > 0$ - некоторая постоянная;

   г) $\forall R > 0$ в области $\mathscr{D}_T \times [-R, R] \times (-\infty, \infty) \times [-R, R] \times (-\infty, \infty)^2$:

$$|F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})| \leq$$

$$\leq C_R \cdot \left\{1+|u_t|^3+|u_{tx}|+|u_{tx}|\cdot|u_t|+|u_{xx}|+|u_{xx}|\cdot u_t^2\right\}, \qquad (2.87)$$

где $C_R > 0$ - некоторая постоянная;

д) выполнено условие 3 теоремы 2.4.

Тогда задача (2.82), (2.2),(2.3) имеет единственное решение почти всюду.

Доказательство. Как мы уже знаем, для доказательства данной теоремы достаточно показать, что всевозможные решения почти всюду $u(t,x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3), принадлежащие пространству $B^{3,2}_{2,2,T}$, в нём априори ограничены. С этой целью умножим обе части уравнения (2.82) на функцию $u_t(t,x)$, проинтегрируем полученное равенство по x от 0 до ℓ и произведем интегрирование по частям по x один раз во втором слагаемом левой части. Тогда $\forall t \in [0,T]$ получаем:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\ell u_t^2(t,x)dx+\alpha\cdot\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx=$$

$$=\int_0^\ell \sigma'(u_x(t,x))\cdot u_{xx}(t,x)\cdot u_t(t,x)dx+\int_0^\ell f(x,u(t,x))\cdot u_t(t,x)dx+$$

$$+\int_0^\ell F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))\cdot u_t(t,x)dx=$$

$$=-\int_0^\ell \sigma(u_x(t,x))\cdot u_{tx}(t,x)dx+\frac{d}{dt}\int_0^\ell g(x,u(t,x))dx+$$

$$+\int_0^\ell F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))\cdot u_t(t,x)dx, \qquad (2.88)$$

где $g(x,u)$ - функция, фигурирующая в (2.84), т.е. $g'_u(x,u)=f(x,u)$.

Интегрируя равенство (2.88) по t от 0 до t и пользуясь неравенствами (2.84), (2.85), получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\frac{1}{2}\int_0^\ell u_t^2(t,x)dx+\alpha\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dxd\tau\le\frac{1}{2}\int_0^\ell\psi^2(x)dx-$$

$$-\int_0^t\int_0^\ell\sigma(u_x(\tau,x))u_{\tau x}(\tau,x)dxd\tau+C\cdot\int_0^\ell\{1+u^2(t,x)\}dx-$$

$$-\int_0^\ell g_0(u(t,x))dx-\int_0^\ell g(x,\varphi(x))dx+C\cdot\ell\cdot t+C\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_0^t\int_0^\ell g_0(u(\tau,x))dxd\tau+\int_0^t\int_0^\ell u^2(\tau,x)dxd\tau+\int_0^t\int_0^\ell u_\tau^2(\tau,x)dxd\tau+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\int_0^\ell u_x^2(\tau,x)dxd\tau\right\}+\varepsilon_0\cdot\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dxd\tau. \qquad (2.89)$$

Пользуясь условиями (2.83), $\forall t\in[0,T]$ имеем:

$$\int_0^t\int_0^\ell\sigma(u_x(\tau,x))u_{\tau x}(\tau,x)dxd\tau=\int_0^\ell\left\{\int_0^t\sigma(u_x(\tau,x))u_{\tau x}(\tau,x)d\tau\right\}dx=$$

$$=\int_0^\ell\left\{\int_{u_x(0,x)}^{u_x(t,x)}\sigma(\theta)d\theta\right\}dx=\int_0^\ell\left\{\int_{\varphi'(x)}^{u_x(t,x)}\sigma(\theta)d\theta\right\}dx=\int_0^\ell\left\{\int_0^{u_x(t,x)}\sigma(\theta)d\theta\right\}dx-$$

$$-\int_0^\ell\int_0^{\varphi'(x)}\sigma(\theta)d\theta\,dx\ge-\int_0^\ell\int_0^{\varphi'(x)}\sigma(\theta)d\theta\,dx,$$

ибо $\forall t\in[0,T]$

$$\int_0^\ell\int_0^{u_x(t,x)}\sigma(\theta)d\theta\,dx\ge 0.$$

Следовательно, $\forall t\in[0,T]$:

$$-\int_0^t\int_0^\ell\sigma(u_x(\tau,x))u_{\tau x}(\tau,x)dx\,d\tau\le\int_0^\ell\int_0^{u_x(t,x)}\sigma(\theta)d\theta\,dx\le C_1, \qquad (2.90)$$

где $C_1>0$ - некоторая постоянная.

Далее, очевидно, что $\forall t\in[0,T]$ и $x\in[0,\ell]$:

$$u(t,x)=\varphi(x)+\int_0^t u_\tau(\tau,x)d\tau,$$

$$\int_0^\ell u^2(t,x)dx \le 2\int_0^\ell \varphi^2(x)dx+2T\cdot\int_0^t\int_0^\ell u_\tau^2(\tau,x)dxd\tau; \tag{2.91}$$

$$u(t,x)=\varphi(x)+\int_0^t\int_0^x u_{\tau\xi}(\tau,\xi)d\xi d\tau,$$

$$u^2(t,x)\le 2\varphi^2(x)+2T\cdot\ell\cdot\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau\xi}^2(\tau,\xi)d\xi d\tau, \tag{2.92}$$

$$\int_0^t\int_0^\ell u^2(\tau,x)dxd\tau \le 2T\cdot\int_0^\ell\varphi^2(x)dx+2T\cdot\ell^2\cdot\int_0^t\left\{\int_0^\tau\int_0^\ell u_{\theta x}^2(\theta,x)dxd\theta\right\}d\tau; \tag{2.93}$$

$$u_x(t,x)=\varphi'(x)+\int_0^t u_{\tau x}(\tau,x)d\tau,$$

$$u_x^2(t,x)\le 2\left(\varphi'(x)\right)^2+2T\cdot\int_0^t u_{\tau x}^2(\tau,x)d\tau, \tag{2.94}$$

$$\int_0^t\int_0^\ell u_x^2(\tau,x)dxd\tau \le 2T\cdot\int_0^\ell\left(\varphi'(x)\right)^2dx+2T\cdot\int_0^t\left\{\int_0^\tau\int_0^\ell u_{\theta x}^2(\theta,x)dxd\theta\right\}d\tau. \tag{2.95}$$

Теперь, пользуясь оценками (2.90), (2.91), (2.93) и (2.95), из (2.89) получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\frac{1}{2}\int_0^\ell u_t^2(t,x)dx+(\alpha-\varepsilon_0)\cdot\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dxd\tau+\int_0^\ell g_0(u(t,x))dx\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int_0^\ell\psi^2(x)dx+C_1+C\cdot\left(\ell+2\int_0^\ell\varphi^2(x)dx\right)-\int_0^\ell g(x,\varphi(x))dx+$$

$$+C\cdot\ell\cdot T+2C\cdot T\cdot\int_0^\ell\varphi^2(x)dx+2C\cdot T\cdot\int_0^\ell\left(\varphi'(x)\right)^2dx+$$

$$+C\cdot\int_0^t\left\{(2T+1)\int_0^\ell u_\tau^2(\tau,x)dx+2T(\ell^2+1)\int_0^\tau\int_0^\ell u_{\theta x}^2(\theta,x)dxd\theta+\right.$$

$$+\int_0^\ell g_0(u(\tau,x))dx\Bigg\}d\tau \le C_2 + C_3\cdot\int_0^t\Bigg\{\int_0^\ell u_\tau^2(\tau,x)dx +$$

$$+\int_0^\tau\int_0^\ell u_{\theta x}^2(\theta,x)dxd\theta + \int_0^\ell g_0(u(\tau,x))dx\Bigg\}d\tau, \tag{2.96}$$

где

$$C_2 \equiv C_1 + C\cdot\ell\cdot(1+T) + 2C\cdot(1+T)\cdot\int_0^\ell \varphi^2(x)dx +$$

$$+2CT\cdot\int_0^\ell(\varphi'(x))^2dx + \frac{1}{2}\int_0^\ell\psi^2(x)dx - \int_0^\ell g(x,\varphi(x))dx,$$

$$C_3 \equiv C\cdot(1+2T+2T\cdot\ell^2).$$

Если принять обозначения

$$\min\left\{\frac{1}{2},\alpha-\varepsilon_0\right\} = \delta_0, \quad \frac{C_2}{\delta_0} = C_4, \quad \frac{C_3}{\delta_0} = C_5,$$

то из (2.96) получим, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^\ell u_t^2(t,x)dx + \int_0^t\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dxd\tau + \int_0^\ell g_0(u(t,x))dx \le$$

$$\le C_4 + C_5\cdot\int_0^t\Bigg\{\int_0^\ell u_\tau^2(\tau,x)dx + \int_0^\tau\int_0^\ell u_{\theta x}^2(\theta,x)dxd\theta + \int_0^\ell g_0(u(\tau,x))dx\Bigg\}d\tau.$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^\ell u_t^2(t,x)dx + \int_0^t\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dxd\tau + \int_0^\ell g_0(u(t,x))dx \le C_4\cdot\exp\{C_5\cdot T\} \equiv C_6.$$

Таким образом, установлены следующие априорные оценки:

$$\int_0^\ell u_t^2(t,x)dx \le C_6 \qquad \forall t\in[0,T], \tag{2.97}$$

$$\int_0^T\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dxdt \le C_6, \tag{2.98}$$

$$\int_0^\ell g_0(u(t,x))dx \le C_6 \qquad \forall t\in[0,T].$$

В силу априорной оценки (2.98), из (2.92) и (2.94) следуют следующие априорные оценки:

$$\|u(t,x)\|_{C(\mathcal{Q}_T)} \le R, \tag{2.99}$$

$$\int_0^\ell u_x^2(t,x)dx \le R \qquad \forall t\in[0,T]. \tag{2.100}$$

Далее, очевидно, что $\forall t\in[0,T]$ и $x\in[0,\ell]$:

$$u_t(t,x) = \int_0^x u_{t\xi}(t,\xi)d\xi.$$

Следовательно:

$$\|u_t(t,x)\|^2_{C[0,\ell]} \le \ell\cdot\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx \quad \forall t\in[0,T]. \tag{2.101}$$

Теперь, представив уравнение (2.82) в виде

$$\alpha u_{txx} = u_{tt} - \sigma'(u_x)\cdot u_{xx} - f(x,u) - F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}),$$

умножив обе части этого равенства на функцию $u_{xx}(t,x)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до ℓ, пользуясь априорной оценкой (2.99) и соответствующим неравенством (2.86), получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx \le \int_0^\ell u_{tt}(t,x)u_{xx}(t,x)dx -$$

$$-\int_0^\ell \sigma'(u_x(t,x))\cdot u_{xx}^2(t,x)dx - \int_0^\ell f(x,u(t,x))\cdot u_{xx}(t,x)dx +$$

$$+C_R\cdot\ell + C_R\cdot\left\{\int_0^\ell u_t^4(t,x)dx + \int_0^\ell u_x^4(t,x)dx + \int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx +\right.$$

$$+\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)u_x^2(t,x)dx+\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx+\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)\cdot u_t^2(t,x)dx\Bigg\}. \quad (2.102)$$

Очевидно, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau\tau}(\tau,x)u_{xx}(\tau,x)dxd\tau=\int_0^\ell\left\{\int_0^t u_{\tau\tau}(\tau,x)u_{xx}(\tau,x)d\tau\right\}dx=$$

$$=\int_0^\ell u_t(t,x)u_{xx}(t,x)dx-\int_0^\ell\psi(x)\varphi''(x)dx-$$

$$-\int_0^t\int_0^\ell u_\tau(\tau,x)u_{\tau xx}(\tau,x)dxd\tau=-\int_0^\ell\varphi''(x)\psi(x)dx+$$

$$+\int_0^\ell u_t(t,x)u_{xx}(t,x)dx+\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dxd\tau\le-\int_0^\ell\varphi''(x)\psi(x)dx+$$

$$+\int_0^T\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dxd\tau+\frac{1}{4\varepsilon}\cdot\int_0^\ell u_t^2(t,x)dx+\varepsilon\cdot\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx, \quad (2.103)$$

где $\varepsilon>0$ - любое число. Но мы будем считать, что ε - фиксированное число, удовлетворяющее условию:

$$0<\varepsilon<\frac{\alpha}{2}. \quad (2.104)$$

Тогда, пользуясь априорными оценками (2.97) и (2.98), из (2.103) получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau\tau}(\tau,x)u_{xx}(\tau,x)dxd\tau\le C_7+\varepsilon\cdot\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx, \quad (2.105)$$

где $C_7>0$ - некоторое постоянное.

С другой стороны, в силу (2.83), $\forall t\in[0,T]$:

$$-\int_0^\ell\sigma'(u_x(t,x))u_{xx}^2(t,x)dx\le 0. \quad (2.106)$$

А в силу априорной оценки (2.99), $\forall t\in[0,T]$:

$$-\int_0^\ell f(x,u(t,x))u_{xx}(t,x)dx \le \int_0^\ell |f(x,u(t,x))|\cdot|u_{xx}(t,x)|dx \le$$

$$\le C_8\cdot\int_0^\ell |u_{xx}(t,x)|dx \le C_8\cdot\ell + C_8\cdot\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx\,, \qquad (2.107)$$

где $C_8 > 0$ - некоторое постоянное.

Далее, очевидно, что $\forall t\in[0,T]$ и $x\in[0,\ell]$:

$$u_x(t,x) = \int_{x_0}^{x} u_{\xi\xi}(t,\xi)d\xi\,, \qquad (2.108)$$

где $x_0 = x_0(t)\in(0,\ell)$ такая точка, что $u_x(t,x_0)=0$. Из (2.108) следует, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u_x(t,x)\|^2_{C[0,\ell]} \le \ell\cdot\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx\,. \qquad (2.109)$$

Теперь, пользуясь неравенствами (2.101), (2.109) и априорными оценками (2.97), (2.100), $\forall t\in[0,T]$ имеем:

$$\int_0^\ell u_t^4(t,x)dx \le \ell\cdot\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx\cdot\int_0^\ell u_t^2(t,x)dx \le C_6\cdot\ell\cdot\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx\,, \qquad (2.110)$$

$$\int_0^\ell u_x^4(t,x)dx \le \ell\cdot\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx\cdot\int_0^\ell u_x^2(t,x)dx \le R\cdot\ell\cdot\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx\,, \qquad (2.111)$$

$$\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)u_x^2(t,x)dx \le \ell\cdot\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx\cdot\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx\,, \qquad (2.112)$$

$$\int_0^\ell u_{xx}^4(t,x)u_t^2(t,x)dx \le \ell\cdot\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx\cdot\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx\,. \qquad (2.113)$$

Интегрируя обе части неравенства (2.102) по t от 0 до t, пользуясь оценками (2.105)-(2.107), (2.110)-(2.113) и априорной оценкой (2.98), получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\left(\frac{\alpha}{2}-\varepsilon\right)\cdot\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx \le \frac{\alpha}{2}\int_0^\ell (\varphi''(x))^2 dx + C_7 + C_8\cdot\ell\cdot T +$$

$$+C_R\cdot\ell\cdot T + C_R\cdot C_6\cdot\ell\cdot C_6 + C_R\cdot C_6 +$$

$$+\int_0^t\left\{\left[(C_8+C_R\cdot R\cdot\ell+C_R)+2C_0\cdot\ell\cdot\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\right]\cdot\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx\right\}d\tau\,. \quad (2.114)$$

Из (2.114), пользуясь условием (2.104), получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx \le C_9 + C_9\cdot\int_0^t\left\{\left[1+\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\right]\cdot\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx\right\}d\tau,$$

где $C_9>0$ - некоторое постоянное. Из последнего неравенства, применив неравенство Р.Беллмана, и пользуясь априорной оценкой (2.98), получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx \le C_9\cdot\exp\{C_9\cdot(T+C_6)\}\equiv C_{10},$$

т.е. справедлива априорная оценка:

$$\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx \le C_{10}\quad \forall t\in[0,T]. \quad (2.115)$$

Из (2.109), в силу априорной оценки (2.115), следует справедливость априорной оценки:

$$\|u_x(t,x)\|_{C(\mathscr{D}_T)} \le R\,. \quad (2.116)$$

Кроме того, в силу априорной оценки (2.115), из (2.113) имеем:

$$\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)u_t^2(t,x)dx \le C_{10}\cdot\ell\cdot\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx \quad \forall t\in[0,T]. \quad (2.117)$$

Далее, аналогично (2.58), $\forall t\in[0,T]$ имеем:

$$\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}} \le 2\|Z\|^2_{B^{2,1}_{2,2,T}} + \frac{4\ell}{\alpha\pi^2}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\int_0^\ell\{\sigma'(u_\xi(\tau,\xi))u_{\xi\xi}(\tau,\xi)+f(\xi,u(\tau,\xi))+$$

$$+F(\tau,\xi,u(\tau,\xi),u_\tau(\tau,\xi),u_\xi(\tau,\xi),u_{\tau\xi}(\tau,\xi),u_{\xi\xi}(\tau,\xi))\}^2\,d\xi d\tau\,. \quad (2.118)$$

Из (2.118), пользуясь априорными оценками (2.116), (2.115), (2.99), неравенством (2.87), а также априорной оценкой (2.98), получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}} \le R_1+R_2\cdot\int_0^t\left\{\int_0^\ell u_\tau^6(\tau,x)dx+\int_0^\ell u^2_{\tau x}(t,x)u^2_\tau(\tau,x)dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^\ell u^2_{xx}(\tau,x)u^4_\tau(\tau,x)dx\right\}d\tau\,, \quad (2.119)$$

где $R_1>0$ и $R_2>0$ - некоторые постоянные.

Теперь, пользуясь оценками (2.110), (2.117) и структурой пространства $B^{2,1}_{2,2,\tau}$, $\forall\tau\in[0,T]$ имеем:

$$\int_0^\ell u_\tau^6(\tau,x)dx \le \frac{\pi^2}{6}\cdot\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,\tau}}\cdot\int_0^\ell u_\tau^4(\tau,x)dx \le$$

$$\le\frac{\pi^2}{6}\cdot C_6\cdot\ell\cdot\int_0^\ell u^2_{\tau x}(\tau,x)dx\cdot\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,\tau}}\,, \quad (2.120)$$

$$\int_0^\ell u^2_{\tau x}(\tau,x)u^2_\tau(\tau,x)dx \le \frac{\pi^2}{6}\cdot\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,\tau}}\cdot\int_0^\ell u^2_{\tau x}(\tau,x)dx\,, \quad (2.121)$$

$$\int_0^\ell u^2_{xx}(\tau,x)u^4_\tau(\tau,x)dx \le \frac{\pi^2}{6}\cdot\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,\tau}}\cdot\int_0^\ell u^2_{xx}(\tau,x)u^2_\tau(\tau,x)dx\le$$

$$\le\frac{\pi^2}{6}\cdot C_{10}\cdot\ell\cdot\int_0^\ell u^2_{\tau x}(\tau,x)dx\cdot\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,\tau}}\,. \quad (2.122)$$

Пользуясь оценками (2.120)-(2.122), из (2.119) получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}} \le R_1 + R_3 \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^\ell u^6_{\tau x}(\tau,x)dx \right\} \cdot \|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,\tau}} d\tau . \qquad (2.123)$$

Из (2.123), применив неравенство Р.Беллмана и пользуясь априорной оценкой (2.98), получаем:

$$\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,T}} \le R_1 \cdot \exp\{R_3 \cdot C_6\} \equiv R_4 , \qquad (2.124)$$

т.е. всевозможные решения почти всюду $u(t,x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3), принадлежащие пространству $B^{3,2}_{2,2,T}$, априори ограничены в $B^{2,1}_{2,2,T}$. Дальнейшая часть доказательства данной теоремы совпадает с той частью доказательства теоремы 2.4, которая изложена непосредственно после установления априорной оценки (2.62). Теорема доказана.

Замечание 2.4. Для выполнения условия $4_в$ теоремы 2.6 достаточно выполнение условия:

$$(*) \begin{cases} \forall R > 0 \ \textit{в области} \ \mathscr{D}_T \times [-R,R] \times (-\infty,\infty)^4 \\ |F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})| \le C_R \cdot \{1 + |u_t|^3 + u_x^2 + \\ + |u_{tx}| + |u_{tx}| \cdot |u_t| + |u_{tx}| \cdot |u_x| + |u_{xx}| + |u_{xx}| \cdot u_t^2 \}, \end{cases} \qquad (2.125)$$

где $C_R > 0$ - некоторое постоянное. Очевидно, что из выполнения последнего условия вытекает и условие $4_г$ теоремы 2.6. Таким образом, для выполнения условий $4_в$ и $4_г$ теоремы 2.6 достаточно выполнение условия $(*)$.

Теорема 2.7. Пусть

1. Выполнено условие 1 теоремы 2.3.
2. *а*) Функция $\sigma(y)$ трижды непрерывно дифференцируема на $(-\infty,\infty)$;

   б) выполнено условие $2_б$ теоремы 2.6.
3. *а*) Функция $f(x,u)$ дважды непрерывно дифференцируема по совокупности своих переменных в замкнутой области $[0,\ell] \times (-\infty,\infty)$;

   б) выполнены условия $3_б$ и $3_в$ теоремы 2.6.
4. *а*) Выполнено условие 2 теоремы 2.3;

   б) выполнены условия $4_б$-$4_д$ теоремы 2.6.

Тогда задача (2.82), (2.2), (2.3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Как мы уже знаем, для доказательства данной теоремы достаточно показать, что всевозможчые классические решения $u(t,x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3), принадлежащие пространству $B^{4,3}_{2,2,T}$, в нём априори ограничены. Так как каждое классическое решение $u(t,x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3) является и её решением почти всюду, то априорная оценка (2.124) справедлива и для классических решений $u(t,x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3). Дальнейшая часть доказательства данной теоремы представляет собою повторение соответствующей части доказательства теоремы 2.5. Теорема доказана.

Замечание 2.5. Как видно из (2.83)-(2.87), при условиях теорем 2.6 и 2.7 правая часть уравнения (2.82) может иметь:

а) по переменным u (при $|u| \to \infty$) и u_x(при $|u_x| \to \infty$) сколь угодно большой (например, экспоненциальный и ещё больший) рост;

б) по переменной u_t (при $|u_t| \to \infty$) кубический рост;

в) а по переменным u_{tx} и u_{xx} (при $|u_{tx}| + |u_{xx}| \to \infty$) лишь линейный рост.

Замечание 2.6. Очевидно, что неравенство (2.85) выполняется и тогда, когда если в его правой части слагаемое $\varepsilon_0 \cdot u^2_{tx}$ заменить слагаемым $C_0 \cdot |u_{tx}|^{2-\delta}$, где δ $(0 < \delta \le 2)$ и $C_0 > 0$ - любые постоянные (т.е. необязательно $C_0 < \alpha$).

Теорема 2.8. Пусть

1. Правая часть уравнения (2.82) не зависит от переменной u_{xx}, точнее $\sigma(y) \equiv 0$ и $F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx})$; выполнены все условия теоремы 2.3, условие 3 теоремы 2.7 и условие $4_б$ теоремы 2.6.
2. $\forall R > 0$ в области $\mathscr{D}_T \times [-R,R] \times (-\infty,\infty)^3$:

$$F_x(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx})\cdot u_{tx}+F_u(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx})\cdot u_x\cdot u_{tx}\le$$
$$\le C_R\cdot\left\{1+u_t^6+u_t^2\cdot u_x^4+u_x^4+u_{tx}^2\cdot u_t^2+u_{tx}^2\cdot u_x^2+u_{tx}^2\right\},\qquad(2.126)$$
$$F_{u_t}(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx})\le C_R\cdot\left\{1+u_t^2+u_x^2\right\},\qquad(2.127)$$
$$\left|F_{u_x}(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx})\right|\le C_R\cdot\left\{1+|u_t|+|u_x|\right\},\qquad(2.128)$$
$$\left|F_{u_{tx}}(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx})\right|\le C_R\cdot\left\{1+|u_t|+|u_x|\right\},\qquad(2.129)$$

где $C_R>0$ - постоянное, зависящее лишь от R.

3. $\forall R>0$ в области $\mathscr{D}_T\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)$:

$$\left|F_x(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx})\right|\le C_R\cdot\left\{1+|u_{tx}|^3\right\},\qquad(2.130)$$
$$\left|F_u(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx})\right|\le C_R\cdot\left\{1+|u_{tx}|^3\right\},\qquad(2.131)$$
$$\left|F_{u_t}(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx})\right|\le C_R\cdot\left\{1+u_{tx}^2\right\},\qquad(2.132)$$

где $C_R>0$ - постоянное.

Тогда задача (2.82), (2.2), (2.3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Как мы знаем, для доказательства данной теоремы достаточно показать, что всевозможные классические решения $u(t,x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3), принадлежащие пространству $B^{4,3}_{2,2,T}$, в нём априори ограничены. При условиях данной теоремы, как видно из процесса доказательства теоремы 2.6, для функций $u(t,x)$ справедливы априорные оценки (2.97) и (2.98).

Теперь дифференцировав равенство (2.82) по x один раз, умножив обе части полученного равенства на функцию $u_{tx}(t,x)$ и проинтегрируя последнее равенство по x от 0 до ℓ, причём произведя интегрирование по частям один раз во втором слагаемом левой части, с учётом того, что $\forall t\in[0,T]$ $u_{txx}(t,0)=$ $=u_{txx}(t,\ell)=0$, получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx+\alpha\cdot\int_0^\ell u_{txx}^2(t,x)dx=\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial x}f(x,u(t,x))\cdot u_{tx}(t,x)dx+$$

$$+\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial x}\mathscr{F}(u(t,x))\cdot u_t(t,x)dx,\qquad(2.139)$$

где

$$\mathscr{F}(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x)).\qquad(2.140)$$

Интегрируя равенство (2.139) по t от 0 до t, получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\frac{1}{2}\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx+\alpha\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau,x)dxd\tau=\frac{1}{2}\int_0^\ell(\psi'(x))^2dx+$$
$$+\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial x}\{f(x,u(\tau,x))\}\cdot u_{\tau x}(\tau,x)dxd\tau+\int_0^t\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial x}\{\mathscr{F}(u(\tau,x))\}\cdot$$
$$\cdot u_{\tau x}(\tau,x)dxd\tau.\qquad(2.141)$$

Очевидно, что $\forall t\in[0,T]$ и $x\in[0,\ell]$:

$$u_{xx}(t,x)=\varphi''(x)+\int_0^t u_{\tau xx}(\tau,x)d\tau,$$
$$\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx\le2\int_0^\ell(\varphi''(x))^2dx+2\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau,x)dxd\tau\qquad(2.142)$$

и, следовательно, в силу (2.109), $\forall t\in[0,T]$:

$$\left\|u_x(t,x)\right\|^2_{C[0,\ell]}\le2\ell\cdot\int_0^\ell(\varphi''(x))^2dx+2\ell\cdot\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau,x)dxd\tau.\qquad(2.143)$$

Теперь, пользуясь априорными оценками (2.97) и (2.100), а также оценками (2.101), (2.142) и (2.143), получаем, что $\forall\tau\in[0,T]$:

$$\int_0^\ell u_{\tau x}(\tau,x)\,dx\le\ell+\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx,\qquad(2.144)$$

$$\int_0^{\ell}|u_x(\tau,x)|\cdot|u_{\tau x}(\tau,x)|dx \le \frac{1}{2}\int_0^{\ell}u_x^2(\tau,x)dx+\frac{1}{2}\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx \le$$

$$\le C\cdot\left\{1+\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\right\}, \qquad (2.145)$$

$$\int_0^{\ell}u_\tau^6(\tau,x)dx \le \{\ell\cdot\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\ \}^2\cdot\int_0^{\ell}u_\tau^2(\tau,x)dx \le$$

$$\le C\cdot\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\cdot\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\,, \qquad (2.146)$$

$$\int_0^{\ell}u_\tau^2(\tau,x)u_x^4(\tau,x)dx \le \ell\cdot\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\cdot\|u_x(\tau,x)\|^2_{C[0,\ell]}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\ell}u_x^2(\tau,x)dx \le \ell\cdot\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\,\cdot$$

$$\cdot\left\{2\ell\cdot\int_0^{\ell}(\varphi''(x))^2dx+2\ell\cdot\int_0^{\tau}\int_0^{\ell}u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta\right\}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\ell}u_x^2(\tau,x)dx \le C\cdot\left\{\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\cdot\int_0^{\tau}\int_0^{\ell}u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta\right\}, \qquad (2.147)$$

$$\int_0^{\ell}u_x^4(\tau,x)dx \le \left\{2\ell\cdot\int_0^{\ell}(\varphi''(x))^2dx+2\ell\cdot\int_0^{\tau}\int_0^{\ell}u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta\right\}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\ell}u_x^2(\tau,x)dx \le C\left\{1+\int_0^{\tau}\int_0^{\ell}u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta\right\}, \qquad (2.148)$$

$$\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)u_\tau^2(\tau,x)dx \le \ell\cdot\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\cdot\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx \le$$

$$\le C\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\cdot\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx, \qquad (2.149)$$

$$\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)u_x^2(\tau,x)dx \le \left\{2\ell\cdot\int_0^{\ell}(\varphi''(x))^2dx+2\ell\cdot\int_0^{\tau}\int_0^{\ell}u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta\right\}\cdot\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx \le$$

$$\le C\cdot\left\{\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx+\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\cdot\int_0^{\tau}\int_0^{\ell}u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta\right\}, \qquad (2.150)$$

$$\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx \le C\cdot\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx, \qquad (2.151)$$

$$\int_0^{\ell}|u_{xx}(\tau,x)|\cdot|u_{\tau x}(\tau,x)|dx \le \frac{1}{2}\int_0^{\ell}u_{xx}^2(\tau,x)dx+\frac{1}{2}\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx \le$$

$$\le \int_0^{\ell}(\varphi''(x))^2dx+\int_0^{\tau}\int_0^{\ell}u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx \le$$

$$\le C\cdot\left\{1+\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)dx+\int_0^{\tau}\int_0^{\ell}u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta\right\}, \qquad (2.152)$$

$$\int_0^{\ell}|u_\tau(\tau,x)|\cdot|u_{xx}(\tau,x)|\cdot|u_{\tau x}(\tau,x)|dx \le \frac{1}{2}\int_0^{\ell}u_{xx}^2(\tau,x)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\ell}u_{\tau x}^2(\tau,x)u_\tau^2(\tau,x)dx \le \int_0^{\ell}(\varphi''(x))^2dx+\int_0^{\tau}\int_0^{\ell}u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta+$$

$$+\frac{1}{2}C\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\cdot\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\le C\cdot\{1+\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\cdot$$

$$\cdot\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx+\int_0^\tau\int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta\ \}, \tag{2.153}$$

$$\int_0^\ell |u_x(\tau,x)|\cdot|u_{xx}(\tau,x)|\cdot|u_{\tau x}(\tau,x)|dx\le\frac{1}{2}\int_0^\ell u_{xx}^2(\tau,x)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)u_x^2(\tau,x)dx\le C\cdot\left\{1+\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^\tau\int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta+\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\cdot\int_0^\tau\int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta\right\}, \tag{2.154}$$

$$\int_0^\ell |u_{\tau xx}(\tau,x)|\cdot|u_{\tau x}(\tau,x)|dx\le\frac{1}{4\varepsilon}\cdot\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx+\varepsilon\cdot\int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau,x)dx, \tag{2.155}$$

$$\int_0^\ell |u_\tau(\tau,x)|\cdot|u_{\tau xx}(\tau,x)|\cdot|u_{\tau x}(\tau,x)|dx\le\varepsilon\cdot\int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau,x)dx+$$

$$+\frac{1}{4\varepsilon}\cdot\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)u_\tau^2(\tau,x)dx\le\varepsilon\cdot\int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau,x)dx+\frac{1}{\varepsilon}\cdot C\cdot$$

$$\cdot\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\cdot\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx, \tag{2.156}$$

$$\int_0^\ell |u_x(\tau,x)|\cdot|u_{\tau xx}(\tau,x)|\cdot|u_{\tau x}(\tau,x)|dx\le\varepsilon\cdot\int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau,x)dx+$$

$$+\frac{1}{4\varepsilon}\cdot\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)u_x^2(\tau,x)dx\le\varepsilon\cdot\int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau,x)dx+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}C\cdot\left\{\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx+\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\cdot\int_0^\tau\int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta\right\}, \tag{2.157}$$

где $C>0$ - некоторое постоянное, не зависящее от u и t, а $\varepsilon>0$ - достаточно малое число, выбираемое ниже подходящим образом.

Теперь, из (2.141), пользуясь развёрнутыми выражениями $\frac{\partial}{\partial x}\{f(x,u(t,x))\}$ и $\frac{\partial}{\partial x}\{\mathscr{F}(x,u(t,x))\}$, имея в виду обозначение (2.140), пользуясь априорной оценкой (2.99), соответствующими неравенствами (2.126)-(2.129) и оценками (2.144)-(2.157), получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\frac{1}{2}\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx+\alpha\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau,x)dxd\tau\le C_1+C_2\cdot\varepsilon\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau,x)dxd\tau+\int_0^t\left\{\left[C_3+C_4\cdot\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx+C_5\cdot\frac{1}{\varepsilon}+\right.\right.$$

$$\left.+C_6\cdot\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\right]\cdot\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx+\left[C_7+C_8\cdot\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx+\right.$$

$$\left.\left.+C_9\cdot\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\right]\cdot\int_0^\tau\int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta\right\}d\tau, \qquad (2.158)$$

где $C_i>0$ $(i=\overline{1,9})$ - некоторые постоянные, не зависящие от u, t и ε.

Теперь, если число ε, фигурирующее в неравенстве (2.158), фиксировать так, чтобы было $C_2\cdot\varepsilon<\alpha$, затем перенести второе слагаемое правой части неравенства (2.158) в его левую часть и разделить обе части последнего полученного неравенства на $\min\left\{\frac{1}{2},\alpha-C_2\cdot\varepsilon\right\}$, то получим, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx+\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau,x)dxd\tau\le C_{10}+C_{10}\cdot\int_0^t\left\{1+\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau,x)dx+\int_0^\tau\int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta,x)dxd\theta\right\}d\tau, \qquad (1.159)$$

где $C_{10}>0$ - некоторая постоянная, не зависящая от u и t.

Из (2.159), применив неравенство Р.Беллмана и пользуясь априорной оценкой (2.98), получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx+\int_0^t\int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau,x)dxd\tau\le$$

$$\le C_{10}\cdot\exp\left\{C_{10}\cdot\left[T+\int_0^T\int_0^\ell u_{tx}^2(\tau,x)dxd\tau\right]\right\}\le C_{11}.$$

Отсюда следует справедливость априорных оценок:

$$\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx\le C_{11}\qquad \forall t\in[0,T], \qquad (2.160)$$

$$\int_0^T\int_0^\ell u_{txx}^2(t,x)dxdt\le C_{11}. \qquad (2.161)$$

Из (2.101), в силу априорной оценки (2.160), следует априорная оценка

$$\|u_t(t,x)\|_{C(\mathscr{D}_T)}\le C_{12}, \qquad (1.162)$$

а из (2.142) и (2.143), в силу априорной оценки (2.161), следуют априорные оценки:

$$\int_0^\ell u_{xx}^2(t,x)dx\le C_{12}\qquad \forall t\in[0,T], \qquad (2.163)$$

$$\|u_x(t,x)\|_{C(\mathscr{D}_T)}\le C_{12}. \qquad (2.164)$$

Таким образом, как видно из (2.99), (2.162) и (2.164), для функций $u(t,x)$ установлена априорная оценка:

$$\|u(t,x)\|_{C^{(1)}(\mathscr{D}_T)}\le R. \qquad (2.165)$$

Далее, аналогично (2.65), $\forall t\in[0,T]$ имеем:

$$\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\le 2\|Z\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}}+\frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\int_0^\ell\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}[f(\xi,u(\tau,\xi))]+\frac{\partial}{\partial\xi}[\mathscr{F}(u(\tau,\xi))]\right\}^2d\xi d\tau. \qquad (2.166)$$

Очевидно, что $\forall t\in[0,T]$ и $x\in[0,\ell]$:

$$u_{tx}(t,x)=\int_{x_0(t)}^x u_{t\xi\xi}(t,\xi)d\xi, \qquad (2.167)$$

где $x_0(t)\in(0,\ell)$ такая точка, что $u_{tx}(t,x_0)=0$.

Из (2.167) получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u_{tx}(t,x)\|^2_{C[0,\ell]}\le\ell\cdot\int_0^\ell u_{txx}^2(t,x)dx. \qquad (2.168)$$

Теперь, пользуясь структурой пространства $B^{3,2}_{2,2,T}$, неравенством (2.168) и априорной оценкой (2.160), $\forall t\in[0,T]$ имеем:

$$\int_0^\ell u_{tx}^6(t,x)dx\le\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{6}\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\cdot\|u_{tx}(t,x)\|^2_{C[0,\ell]}\cdot\int_0^\ell u_{tx}^2(t,x)dx\le$$

$$\le\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{6}\cdot C_{11}\cdot\ell\cdot\int_0^\ell u_{txx}^2(t,x)dx\cdot\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}. \qquad (2.169)$$

Из (2.169), пользуясь развёрнутыми выражениями $\frac{\partial}{\partial x}\{f(x,u(t,x))\}$ и $\frac{\partial}{\partial x}\{\mathscr{F}(u(t,x))\}$, имея в виду обозначение (2.140), пользуясь априорной оценкой (2.165), соответствующими неравенствами (2.130)-(2.132), оценкой (2.169), в области $\mathscr{D}_T\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)$ неравенствами

$$F_{u_t}(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx})\le C_R\cdot(1+2R),$$

$$F_{u_{tx}}(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx})\le C_R\cdot(1+2R)$$

(вытекающими из (2.128) и (2.129)), а также априорными оценками (2.160), (2.161) и (2.163), получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} \leq R_1 + R_2 \cdot \int\limits_0^t \left\{ \int\limits_0^l u^2_{\tau xx}(\tau, x)dx \right\} \cdot \|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}} d\tau, \qquad (2.170)$$

где $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$ - некоторые постоянные, не зависящие от u и t. Из (2.170), применив неравенство Р.Беллмана и пользуясь априорной оценкой (2.161), получаем:

$$\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} \leq R_1 \cdot \exp\{R_2 \cdot C_{11}\} \equiv R_3. \qquad (2.171)$$

Таким образом, показали, что всевозможные классические решения $u(t,x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3), принадлежащие пространству $B^{4,3}_{2,2,T}$, априори ограничены в $B^{3,2}_{2,2,T}$. Дальнейшая часть доказательства данной теоремы, т.е. установление априорной ограниченности функций $u(t,x)$ и в $B^{4,3}_{2,2,T}$, представляет собой повторение соответствующей части доказательства теоремы 2.5. Теорема доказана.

Замечание 2.7. Отметим, что для выполнения неравенства (2.126) достаточно, например, чтобы $\forall R > 0$ в области $\mathscr{D}_T \times [-R, R] \times (-\infty, \infty)^3$ выполнялись условия:

$$|F_x(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx})| \leq C_R \cdot \{1 + u_t^4 + |u_t| \cdot |u_x|^3 + |u_x|^3 +$$
$$+ |u_{tx}| + |u_{tx}| \cdot u_t^2 + |u_{tx}| \cdot u_x^2 \},$$
$$|F_u(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx})| \leq C_R \cdot \{1 + |u_t|^3 + |u_t| \cdot u_x^2 + u_x^2 +$$
$$+ |u_{tx}| + |u_{tx}| \cdot |u_t| + |u_{tx}| \cdot |u_x| \},$$

ибо

$$|u_{tx}| \leq 1 + u_{tx}^2,$$
$$u_t^4 \cdot |u_{tx}| \leq \frac{1}{2}\{u_t^6 + u_t^2 \cdot u_{tx}^2\},$$
$$|u_t| \cdot |u_x|^3 \cdot |u_{tx}| \leq \frac{1}{2}\{u_t^2 \cdot u_x^4 + u_x^2 \cdot u_{tx}^2\},$$
$$|u_x|^3 \cdot |u_{tx}| \leq \frac{1}{2}\{u_x^4 + u_x^2 \cdot u_{tx}^2\},$$

$$|u_x| \cdot |u_{tx}| \leq 1 + u_x^2 \cdot u_{tx}^2,$$
$$|u_t|^3 \cdot |u_x| \cdot |u_{tx}| \leq \frac{1}{2}\{u_t^6 + u_x^2 \cdot u_{tx}^2\},$$
$$|u_{tx}| \cdot |u_x| \cdot |u_{tx}| \leq \frac{1}{2}\{u_{tx}^2 \cdot u_x^2 + u_{tx}^2\},$$
$$|u_{tx}| \cdot |u_t| \cdot |u_x| \cdot |u_{tx}| \leq \frac{1}{2}\{u_{tx}^2 \cdot u_t^2 + u_x^2 \cdot u_{tx}^2\}.$$

Замечание 2.8. Как видно из неравенств (2.84), (2.85) и (2.127)-(2.129), при условиях последней теоремы 2.8, правая часть уравнения (2.82) может иметь: по u (при $u \to \infty$) и u_t (при $|u_t| \to \infty$) сколь угодно большой рост, по u_x (при $|u_x| \to \infty$) квадратичный рост, а по u_{tx} (при $|u_{tx}| \to \infty$) лишь линейный (первый) порядок роста.

Литература

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. Дис… докт. физ.-мат.наук – Баку, 1973, 319 с.
2. Nagumo J., Arimoto S. and Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proceeding of the JRE, 50 (10), 1962, pp.2061-2070.
3. Reiko Arima and Yojiro Hasegawa. On global solutions for mixed problem of a semilinear differential equation // Proc. Japan Acad., 39, №10, 1963, pp.721-725.
4. Jamaguti Masaja. The asymptotic behaviour of the solution of a semilinear partial differential equation related to an active pulse transmission line // Proc. Japan Acad., 39, №10, 1963, pp.726-730.
5. Расулова Г.А. Исследование смешанной задачи для одного класса квазилинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференциальные уравнения, 1967, 3, №9, с.1578-1591.
6. Greenberg J.M., Mac Camy R.C. and Mizel V.J. On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$ // J.Math.Mech., 1968, 17, pp.707-728.
7. Greenberg J.M. On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\rho_0 u_{tt} = E(u_x) \cdot u_{xx} + \lambda u_{xxt}$ // J. of Math. Anal. and Appl., 1969,25, pp.575-591.
8. Greenberg J.M., Mac Camy R.C On the exponential stability of solutions of $E(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho u_{tt}$ // J.Math.Anal. and Appl., 1970, 31, №2, pp.406-417.
9. Mac Camy R.C. Existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma(u_x) + \lambda(u_x)u_{tt})$ // Indiana Univ. Math. J., 1970, 20, №3, pp.231-238.
10. Крицкая С.С. Математическое рассмотрение задачи о продольном колебании упруго-вязкого неоднородного стержня // «Известия Высших Учебных Заведений. Математика», 1971, №4 (107), с.37-41.
11. Davis P.L. On the existence, uniqueness and stability of solutions of a nonlinear functional differential equation // J.Math.Anal. and Appl., 1971, 34, №1, pp.128-140.
12. Кулиева Б.А. Исследование предельной краевой задачи на полуоси для одного класса квазилинейных уравнений третьего порядка и задачи на сопряжение двух уравнений (одного квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка и некоторого квазилинейного уравнения третьего порядка). Дис… канд.физ.-мат. наук – Баку, 1972, 129 с.

Рубинов Л.Я. Некоторые особенности одномерного ламинарного течения вязкой сжимаемой жидкости в трубе // «Известия Высших Учебных Заведений. Математика», 1974, №1, с.96-102.
Sowunti C.O.A. On the existence and uniqueness of periodic solution of the equation $\rho u_{tt} - \mu u_{xx} - K^* u_{xx} - \lambda u_{xtx} - f = 0$ // "Boll. Unione mat.ital.", 1974, 10, №3, pp.724-729.
Nishihara K. A remark on a paper of J.M.Greenberg, R.C. Mac Camy and V.J.Mizel // TRU Math., 1974, 10, pp. 37-40.
Davis P.L. A quasilinear hyperbolic and related third-order equations // J.Math.Anal. and Appl., 1975, 51, №3, pp.596-606.
Mitsuhiro Nakao, Tokumori Nanby. Existence of global (bounded) solutions for some nonlinear evolution equation of second order // «Кюсю дайгаку кеебу сугаку дзасси, Math. Repts. Coll.Gen.Educ.Kyushy Univ.», 1975, 10, №1, pp.67-75.
Clements J.C. On the existence and uniqueness of solutions of the equation $u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_i(u_{x_i})) - \Delta_N u_t = f$ // Canad. Math.Bull., 1975, 18 (2), pp.181-187.
Филимонов А.М. Периодические решения некоторых нелинейных уравнений с частыми производными // Дифференциальные уравнения, 1976, 12, №11, с. 2076-2084.
Raupp M.A., Rezende N.S. De computation of longitudinal motions of a viscoelastic bar // Bol.Soc. Brasil. Math., 1977, 8, №2, pp. 131-147.
Кожанов А.И. Смешанная задача для одного класса уравнений неклассического типа // Дифференциальнын уравнения, 1979, 15, №2, с.272-280.
Arya J.C., Lardner R.W. Plane shock waves viscoelastic media displaying cubic elasticity // Util. Math., 1979, 16, pp.223-248.
Ebihara Yukiyoshi. On some nonlinear evolution equations with the strong dissipation.I. // J.Different. Equat., 1978, 30, №2, pp.149-164.
Ebihara Yukiyoshi. On some nonlinear evolution equations with the strong dissipation.II. // J.Different. Equat., 1979, 34, №3, pp.339-352.
Andrews G. On the existence of solutions to the equation $u_{tt} = u_{xxt} + (\sigma(u_x))_x$ // J.Different Equat., 1980, 35, №2, pp.200-231.
Webb G.F. Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation // Can.J.Math., 1980, 32, №3, pp.631-643.
Longman J.M. Wave propagation in a viscoelastic solid // "J. comput. Phys.", 1980, 37, №2, pp.171-182.
Пятков С.Г. Об одном нелинейном уравнении третьего порядка // «Дифференциальные уравнения с частными производными. Труды конференции по дифференциальным уравнениям и вычислительной математике, Новосибирск, 1978», Новосибирск, 1980, с. 94-96.

29. Nakao Mitsuhiro. On global classical solutions of a quasi-linear wave equation with a viscoelastic term // «Кюсю дайгаку кёёбу сугаку дзасси. Math. Repts. Coll.Gen.Educ.Kyushy Univ.», 1981, 13, №1, pp.1-29.
30. Белов Ю.Я., Яненко Н.Н. Об одной регуляризации уравнений Бюргерса // Доклады АН СССР, 1979, т.246, №3, с.521-524.
31. Кажихов А.В. , Николаев В.Б. О корректности краевых задач для уравнений вязкого газа с немонотонной функцией стояния // Численные методы механики сплошной среды, 1979, т.10, №2, с. 77-84.
32. Ebihara Y. Some evolution equations with the quasi-linear strong dissipation // J.Math.pures.et.appl., 1979, 58, №2, pp.229-245.
33. Кожанов А.И. Смешанная краевая задача для некоторых классов нелинейных уравнений третьего порядка // Математический сборник, 1982, 118, №4, с . 504-522.
34. Ларькин Н.А. Теоремы существования для квазилинейных псевдогиперболических уравнений // Доклады АН СССР , 1982, 265, №6, с. 1316-1319.
35. Ebihara Yukiyoshi. On some nonlinear evolution equations with the strong dissipation.III. // J.Different. Equat., 1982, 45, №3, pp.332-355.
36. Артюшин А.Н. О разрешимости смешанной задачи для одного класса сильно нелинейных уравнений третьего порядка // «Краевые задачи для нелинейных уравнений», Новосибирск, 1982, с.92-99.
37. Кожанов А.И. Об одном классе нелинейных уравнений порядка 2n+1 // «Неклассические задачи уравнений математической физики», Новосибирск, 1982, с.96-103.
38. Dorau Genowefa. On some mixed linear problems for the partial differential equation of third order // “Demonstr. Math.”, 1983, 16, №3, pp.777-785.
39. Ebihara Yukiyoshi. Some evolution equations with linear and quasilinear strong dissipation // «Фукуока дайгаку сого кэнкю-дзёхо, сидзэн кагаку-хэн, Bull. Cent. Res. Jnst.Fukuoka Univ. Natur.Sci.”, 1983, №66, pp.7-19.
40. Артюшин А.Н. Смешанная задача для одного уравнения высокого порядка // “Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики”, Новосибирск, 1983, с.135-141.
41. Беркалиев З.Б. Аттрактор некоторой квазилинейной системы уравнений с частыми производными // МГУ, М., 1984, 43с. (рукопись депонирована в ВИНИТИ 10 июля 1984г., №4940-84 Деп.).
42. Шарифов Т.А. Исследование обобщённого решения одномерной краевой задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка // Деп. в ВИНИТИ, №5490-81, Баку, 1981, 55с.
43. Шарифов Т.А. Исследование обобщённого решения одномерной краевой задачи в конечной области для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка // Доклады АН Азерб. ССР, 1984, т.15, №2, с.10-16.

44. Шарифов Т.А. Исследование решения почти всюду одномерной краевой задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. I. // Деп. в ВИНИТИ, №4933-82, Баку, 1982, 26 с.
45. Шарифов Т.А. Исследование решения почти всюду одномерной краевой задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. II. // Деп. в АзНИИНТИ, №117, Аз-Д 84 от 19.10.83, 33 с.
46. Шарифов Т.А. Исследование классического решения одномерной краевой задачи для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. I. // Деп. в АзНИИНТИ, №118,Аз-Д 83 от 19.10.83, 30 с.
47. Шарифов Т.А. Исследование классического решения одномерной краевой задачи для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. II. // Деп. в АзНИИНТИ, №187, Аз-Д 84 от 04.04.84,29 с.
48. Шарифов Т.А. Исследование классического решения одномерной краевой задачи для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью // Материалы IV республиканской конференции молодых учёных по математике и механике, посвященной 60-летию образования СССР, часть II, Издательство «Элм», Баку, 1983, с.249-252.
49. Худавердиев К.И., Шарифов Т.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка // Материалы IV республиканской конференции молодых учёных по математике и механике, посвящённой 60-летию образования СССР, часть II, Издательство «Элм», Баку, 1983, с.245-248.
50. Худавердиев К.И., Шарифов Т.А. Исследование почти всюду и классического решений одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // «Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения» (тематический сборник научных трудов). Издание Азгосуниверситета , 1983, с.93-104.
51. Худавердиев К.И., Шарифов Т.А. О классической разрешимости в целом одномерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // «Исследования по дифференциальным уравнениям» (тематический сборник научных трудов). Издание Азгосуниверситета , 1984, с.36-47.
52. Худавердиев К.И., Шарифов Т.А. Исследование почти всюду и классического решений одномерной смешанной задачи для одного класса по-

лулинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Деп. в АзНИИНТИ, №188 Аз-Д 84 от 04.04.84, 64 с.

53. Шарифов Т.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Дисс… канд.физ.мат.наук – Баку, 1985, 153 с.

54. Dang Dinh Hai. On a strongly damped quasilinear wave equation // “Demonstr. Math.”, 1986, 19, №2, pp. 327-340.

55. Сувейка И.В. Об асимптотическом поведении решений основных смешанных задач во внешности компакта для уравнения распространения возмущений в упруго-вязких средах // «Труды V республиканской конференции по нелинейным задачам математической физики, Львов, 9-17 сентября 1985 г.», Донецкий университет, Донецк, 1987, с.188-190 (рукопись депонирована в Укр НИИНТИ 16.07.87, №2077-Ук87).

56. Артюшин А.Н. Теорема существования для одного уравнения третьего порядка // «Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики», Новосибирск, 1987, с.3-9.

57. Худавердиев К.И., Алиев С.Дж. Исследование многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Тематический сборник «Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения», издательство АГУ, Баку, 1986, с.13-24.

58. Алиев С.Дж. Исследование решения почти всюду многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Деп. в ВИНИТИ, №8063-В86, 26.02.86, 114 с.

59. Худавердиев К.И., Алиев С.Дж. Исследование классического решения многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Тематический сборник «Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с частными производными», издательство АГУ, Баку, 1987, с.11-24.

60. Алиев С.Дж. Исследование классического решения многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Материалы VII республиканской конференции молодых учёных по математике и механике, книга I, «Элм», Баку, 1987, с.35-38.

61. Худавердиев К.И. Исследование многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Тезисы докладов семинара-совещания по дифференциальным уравнениям и математической физике, г.Баку, 25-28 сентября 1990 г., Баку, 1990, с.33-34.

62. Алиев С.Дж. Исследование многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. Дис…канд.физ.наук – Баку, 1987, 145 с.

Лаптев Г.И. Разрешимость начально-краевых задач для квазилинейных уравнений с частными производными третьего порядка с одной пространственной переменной // Дифференциальные уравнения, 1988, 24, №6, с.1011-1021.
Лаптев Г.И. Об одном квазилинейном уравнении с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения, 1988, 24, №7, с.1270-1272.
Lin Yan Ping. A mixed type boundary problem describing the propagation of disturbances in viscous media.I. Weak solutions of quasi-linear equations // J. Math.Anal.and Appl., 1988, 135, №2, pp.644-653.
Liu Yacheng, Liu Daocheng. Jnitial and boundary-value problem of equation $u_{tt} - \alpha\Delta u_t - \Delta u = f(u)$ // Хуанхжун гунсюэюань сюэбао. J.Huazhong (Cent.China) Univ.Sci. and Technol., 1988, 16, №6, pp.169-173.
Andrade N.G. Weak periodic solutions of a nonlinear wave equation // Mat.Apl.e. comput., 1988, 7, №3, pp.169-185.
Kubaszewski Wladyslaw. A limit problem for the equation $D_t Pu = f$ m the strip // Lesz. nauk. opusc. math., AGH Krakowie, 1988, №4, pp.129-137.
Жамалов Р.С. Задача с косой производной для одного уравнения третьего порядка // «Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики», Новосибирск, 1989, с.115-116.
Tsujioka Kumo. On a damped wave equation with a singular boundary condition // Saitama Math.J., 1990, 8, pp.31-39.
Забрейко П.П., Красносельский М.А. Об одном приёме получения новых принципов неподвижной точки // Доклады АН СССР, 1967, т.176, №6, с.1233-1235.
Функциональный анализ. СМБ (под редакцией С.Г.Крейна и др.). М.: Наука, 1972, 544с.
Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир,1965, 276 с.